

## 1. シグマ関数により解が与えられるシグマ因子上の力学系

[1] では、種数 3 の超楕円曲線  $V$  の 2 次対称積上の有理型関数体  $\mathcal{G}$  に作用する微分  $\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_5$  が定義され、その微分に関する  $\mathcal{G}$  の 4 つの元  $u_2, u_4, v_5, v_7$  を座標とする  $\mathbb{C}^4$  上の力学系が構成されています。本研究では、 $V$  のシグマ因子上の有理型関数体  $\mathcal{F}$  が  $\mathcal{G}$  と同型になることを用いて、 $\mathcal{F}$  において  $\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_5$  に対応する微分  $L_3, L_5$  を具体的に構成します。 $u_2, u_4, v_5, v_7$  に対応する  $\mathcal{F}$  の元  $F_2, F_4, F_5, F_7$  はシグマ関数を用いて構成できるので、これにより、シグマ関数により解が与えられるシグマ因子上の力学系を導出することができます (Buchstaber 氏との共同研究)。

## 2. 代数積分の逆関数

$X$  を自然数列  $(a_1, \dots, a_m)$  から定義される種数  $g$  の telescopic 曲線、 $du$  を  $X$  上の正則微分形式を並べた  $g$  次元のベクトル、 $\text{Jac}(X)$  を  $X$  のヤコビ多様体とします。1 点のアーベル・ヤコビ写像

$$X \rightarrow \text{Jac}(X), \quad P = (x_1, \dots, x_m) \rightarrow u := \int_{\infty}^P du$$

に対して、 $P$  の座標  $x_i$  を  $u$  から表示するという問題を考えます。この問題は種数が小さい超楕円曲線や  $(n, s)$  曲線の場合は大西氏や松谷氏などによりシグマ関数を用いることで表示できることが示されています [3]。本研究では、一般の telescopic 曲線に対してこの問題を解決します。そのためには、アーベル・ヤコビ写像による像においてシグマ関数が 0 になるかどうかを具体的に調べる必要があります。シグマ関数の原点における級数展開を具体的に計算してこの性質を調べます。

## 3. 任意のリーマン面に付随するシグマ関数

[2] では任意のリーマン面に対してまでシグマ関数が一般化されています。このシグマ関数は、シグマ関数を定義する際に用いる標準ホモロジー基底の取り方によらない (モジュラー不変性) という性質を持っています。一方、 $(n, s)$  曲線や telescopic 曲線のシグマ関数は、原点における級数展開の係数が定義方程式の係数の有理数係数の多項式になるというモジュラー不変性より強い代数的性質を持つことが示されています。本研究では、任意の代数曲線の定義方程式を三浦標準形で表現し、[2] で定義された任意のリーマン面のシグマ関数の原点における級数展開の係数が定義方程式の係数の有理数係数の多項式であることを示します。種数 2 以下の代数曲線は全て超楕円曲線として表現できるので、種数 2 以下の代数曲線に対してはこの問題は解決されています。一方、種数 3 の代数曲線で telescopic 曲線として表現できないものは、三浦標準形の枠組みでは、 $(3, 5, 7)$  曲線と  $(4, 5, 6, 7)$  曲線です。三浦標準形全てで解決することが困難な場合は、まず  $(3, 5, 7)$  曲線と  $(4, 5, 6, 7)$  曲線の場合を検討します。

## 参考文献

- [1] V. M. Buchstaber and A. V. Mikhailov, "Infinite-Dimensional Lie Algebras Determined by the Space of Symmetric Squares of Hyperelliptic Curves", *Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya*, Vol. 51, No. 1, pp. 4-27, 2017.
- [2] A. Nakayashiki, "Tau Function Approach to Theta Functions", *International Mathematics Research Notices*, rnv297, (2015).
- [3] Y. Ônishi, "Complex Multiplication Formulae for Hyperelliptic Curves of Genus Three", *Tokyo J. Math.*, Vol. 21, No. 2, (1998).