

これまでの研究

橋爪 惠

3次元空間内に埋め込まれた1次元閉多様体(円周またはいくつかの円周の和)を**絡み目**と呼ぶ. 特に1成分からなる絡み目を**結び目**と呼ぶ. 結び目・絡み目の研究においては, それらを平面(や更に一般に曲面)に射影して得られる**ダイアグラム**と呼ばれる図形を通して研究することが, 基本的な手法である. 3次元空間(または3次元球面)内にある結び目・絡み目を平面(や更に一般に曲面)に射影して得られる, 多重点が横断的な2重点のみから成るような図形を考える. こうして得られる図形を**射影図**という. そして, この射影図の2重点のところで線の上下の情報が見えるように描いたものを**ダイアグラム**という. ダイアグラム内の2重点のことを**交差**といい, 射影図によって分けられた曲面の各成分を**領域**という. ダイアグラムが与えられた時, それを局所的に変形する操作(以下, このような操作のことを**operation**と呼ぶ)は結び目・絡み目の構造を研究する手法の一つである.

岸本健吾氏(大阪工大)によって**領域交差交換**(**region crossing change**)と呼ばれる**operation**が導入された. これは次のような操作である. 結び目・絡み目のダイアグラム**D**の領域**R**の境界上の全ての交差の上下の情報を入れ換えて得られるダイアグラムを **$D_{rec}(R)$** と表すことにする. **D**から **$D_{rec}(R)$** を与える操作を**R**での**領域交差交換**という. 一般にダイアグラムの複数の領域からなる集合**H**に対して**H**での**領域交差交換**とは**H**の各成分での領域交差交換の合成である. このとき清水理佳氏(群馬高専)[S]によって任意の結び目ダイアグラムに対して, 任意の交差の集合を領域交差交換で入れ換えることができる, ということが示されている. また一般に, 絡み目は領域交差交換によって自明な絡み目に変形することはできないことも注意されている. 更に, 最近井上歩-清水遼(愛知教育大)[IS]は**領域凍結交差交換**(**region freeze crossing change**)と呼ばれる領域交差交換と関係の深い**operation**を考案した. これは次のような操作である. ダイアグラム**D**の領域**R**の境界上にない全ての交差の上下の情報を入れ換えて得られるダイアグラムを **$D_{rfcc}(R)$** と表すことにする. **D**から **$D_{rfcc}(R)$** を与える操作を**R**での**領域凍結交差交換**という. 一般にダイアグラムの複数の領域からなる集合**H**に対して**H**での**領域凍結交差交換**とは**H**の各成分での領域凍結交差交換の合成である. 井上-清水氏はある結び目のダイアグラムに対して, そのある交差でそこだけを入れ換える領域凍結交差交換の領域が存在しない, ようなものが存在することを示した.

申請者は各領域交差交換に対して, それに対応するダイアグラムの領域を基底とする \mathbb{Z}_2 線形空間からダイアグラムの交差を基底とする \mathbb{Z}_2 線形空間への \mathbb{Z}_2 線形写像(ϕ と書くことにする)を導入し, これを用いて領域交差交換の大域的性質に関する次のような研究を行った.

・ダイアグラムを全く変えないような領域交差交換の全体は $\ker \phi$ に対応するが, これの標準的な基底を求めた(公表論文等の参考書類参照[H1]).

・ ϕ の像($\text{Im } \phi$)は線形部分空間になるがその, 幾何的に意味のある, 生成系を見つけた. さらに, ϕ の余核の表示について考察し, 特に, 与えられた射影図から誘導されるグラフを定義し, そこからこの線形写像の余核の代表系を与える方法を見いだした(公表論文等の参考書類参照[H2]).

また申請者は領域凍結交差交換に対してそれに対応するダイアグラムの領域を基底とする \mathbb{Z}_2 線形空間からダイアグラムの交差を基底とする \mathbb{Z}_2 線形空間への \mathbb{Z}_2 線形写像(ϕ と書くことにする)を導入し, これを用いて領域凍結交差交換の大域的性質に関する次のような研究を行った.

・領域凍結交差交換によってなにも変えない領域の集合は ϕ のkernelに対応する. 一般に $\dim(\ker \phi) \leq \dim(\ker \phi)$ が成り立つことを示し, さらに“ $<$ ”となる必要十分条件を示した.

・与えられた交差の集合が「 ϕ の像でありかつ ϕ の像ではない」となるような必要十分条件を与えた.

以上の結果は井上-清水の結果の絡み目への自然な拡張となっている.

参考文献

[H1]M. Hashizume, On the homomorphism induced by region crossing change, JP. Jour. of Geom. and Top. Vol 14, Num 1, 2013, p29-37

[H2]M. Hashizume, On the image and cokernel of homomorphism induced by region crossing change, JP. Jour. of Geom. and Top. Vol 18, Num 2, 2015, p133-162

[S]A. Shimizu, Region crossing change is unknotting operation, Journal of the Math. Soc. of Japan 66 (2014), 693-708

[IS]A. Inoue, R. Shimizu, A subspecies of region crossing change, region freeze crossing change, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, to appear.