今後の研究計画

ヘッセンバーグ多様体における以下の問題に取り組むことを今後の研究計画とする。

- **正則な冪零ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環**
  正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(N, I)$ のコホモロジー環の明示的な表示は A 型、B 型、C 型、G_2 型のとき既に与えられている（論文リスト [2-1], [2-2]）。この結果は、これまでの研究成果で述べたイデアル配置 $\mathcal{A}_I$ の logarithmic derivation module $D(\mathcal{A}_I)$ がよく研究されているため、超平面配置で知られている事実を用いることにより得られた。D 型、E 型 (E_6, E_7, E_8)、F_4 型のときは正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(N, I)$ のコホモロジー環の明示的な表示はまだ与えられていないため、引き続きこの問題に取り組む。

- **正則なヘッセンバーグ多様体の研究**
  これまでの研究成果で述べた次の環同型

  $$H^*(\mathrm{Hess}(N, I)) \cong H^*(\mathrm{Hess}(S, I))^W$$

  の一般化を目指す。まずは A 型の場合にこの問題に取り組む。R_λ を正則（λ はジョルダンブロックのサイズを表す）とする。Brosnan-Chow は正則なヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(R_\lambda, h)$ のコホモロジーと正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(S, h)$ のコホモロジーの間に次のベクトル空間としての同型写像があることを示した：

  $$H^i(\mathrm{Hess}(R_\lambda, h)) \cong H^i(\mathrm{Hess}(S, h))^{\mathfrak{S}_\lambda}$$

  ここで $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ とすると $\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k}$ である。このベクトル空間としての同型写像が環としての同型写像であるかどうかについて調べる。

- **Stanley-Stembridge 予想の解決**
  Shareshian-Wachs はグラフ理論における Stanley-Stembridge 予想の解決へ向けて大きな一歩を与えた。それはこの予想が正則な半単純ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー $H^*(\mathrm{Hess}(S, h))$ の上の対称群 $\mathfrak{S}_n$ の表現を調べることに帰着されるということである。そこで上記で述べた正則なヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(R_\lambda, h)$ と正則な半単純ヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(S, h)$ の関係を足がかりに Stanley-Stembridge 予想の解決を目指す。