これまでの研究成果

私はこれまでヘッセンバーグ多様体のトポロジーについて研究してきた。ヘッセンバーグ多様体とは旗多様体の部分多様体であり、そのトポロジーは他分野と関係があることが知られている。以下に挙げるヘッセンバーグ多様体は他分野と関連する興味深い対象である：

1. スプリンガー多様体（対称群の幾何学的表現）
2. ピーターソン多様体（旗多様体の量子コホモロジー）
3. 正則な冪零ヘッセンバーグ多様体（超平面配置）
4. 正則な半単純ヘッセンバーグ多様体（グラフ理論）

私はまず 1, 2, 3 の同変コホモロジー環の計算を行った（論文リスト [1-1], [1-2], [1-3], [1-4], [2-2]）。特に、正則な冪零ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環の明示的な表示が得られ、そのことから正則な半単純ヘッセンバーグ多様体との関係や超平面配置との関連が得られた。以下そのことについて述べる。

- **正則な冪零ヘッセンバーグ多様体と正則な半単純ヘッセンバーグ多様体の関係（論文リスト [2-2]）**
  A 型ヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(X,h)$ は 2 つのデータ (i) 線形写像 $X:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ と (ii) ヘッセンバーグ関数 $h:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\}$（任意の i に対して $h(i)\geq i$ を満たす広義単調増加関数）から定まる旗多様体の部分多様体である。X が正則な冪零写像 N（正則な半単純写像 S）のとき、$\mathrm{Hess}(N,h)$ を正則な冪零ヘッセンバーグ多様体（$\mathrm{Hess}(S,h)$ を正則な半単純ヘッセンバーグ多様体）と呼ぶ。このとき、$\mathrm{Hess}(N,h)$ と $\mathrm{Hess}(S,h)$ の間にある次の予期せぬ環同型が得られた：

  $$H^*(\mathrm{Hess}(N,h))\cong H^*(\mathrm{Hess}(S,h))^{\mathfrak{S}_n}$$

  ここで $\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群を表し、$H^*(\mathrm{Hess}(S,h))$ 上の $\mathfrak{S}_n$ 作用は GKM グラフを用いて Tymoczko により導入されたものである。

- **正則な冪零ヘッセンバーグ多様体と超平面配置との関係（論文リスト [2-1]）**
  上記では A 型ヘッセンバーグ多様体について考察してきたが、ヘッセンバーグ多様体は一般の Lie 型の旗多様体 G/B の部分多様体としても定義できる。このとき、ヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(X,I)$ は 2 つのデータ (i) $X\in\mathfrak{g}$ と (ii) lower ideal $I\subset\Phi^+$ から定まる旗多様体 G/B の部分多様体である。ここで $\mathfrak{g}$ は G のリー環、Φ^+ は positive roots 全体の集合を表す。一方、超平面配置の方では lower ideal I からワイル配置の部分配置であるイデアル配置 $\mathcal{A}_I$ が定義され、その logarithmic derivation module $D(\mathcal{A}_I)$ を考える。ここで $D(\mathcal{A}_I)$ は極大トーラスのリー環の双対空間の対称代数 $\mathcal{R}:=\mathrm{Sym}\,\mathfrak{t}^*$ 上の加群である。$D(\mathcal{A}_I)$ から環 $\mathcal{R}$ のイデアル $\mathfrak{a}(I)$ を定義し、剰余環 $\mathcal{R}/\mathfrak{a}(I)$ がなんと正則な冪零ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環 $H^*(\mathrm{Hess}(N,I))$ と環として同型という結果が得られた。さらにこの剰余環 $\mathcal{R}/\mathfrak{a}(I)$ は正則な半単純ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環のワイル群 W による不変部分環 $H^*(\mathrm{Hess}(S,I))^W$ と環として同型という結果も得られ、まとめると次の環同型が得られた：

  $$H^*(\mathrm{Hess}(N,I))\cong\mathcal{R}/\mathfrak{a}(I)\cong H^*(\mathrm{Hess}(S,I))^W$$