

今後の研究計画

河村 建吾

曲面結び目は \mathbb{R}^4 内の連結閉曲面のことであり、 \mathbb{R}^3 内の連結閉曲線としての結び目の高次元化である。一方、結び目を連結閉曲線から \mathbb{R}^3 への一般的写像の像であるとみなせばその高次元化は連結閉曲面から \mathbb{R}^4 への一般的写像の像となり、それが特異曲面結び目である。言い換えれば、特異曲面結び目は \mathbb{R}^4 へはめ込まれた連結閉曲面であり、多重点は横断的な2重点（ノードという）を持つものである。従って、特異曲面結び目は曲面結び目と同様に結び目理論において重要な研究対象である。本研究の目的は特異曲面結び目をダイアグラムの観点から研究し、その性質を明らかにすることである。主に次の2点について研究を進める。

(1) 新しく導入したカンドルコホモロジー群の計算とその応用

カンドルとはライデマイスター変形の幾何的な情報を抽出した代数系のことであり、古典的結び目や曲面結び目との相性がよいことが知られている。1990年代後半に Carter-Jelsovsky-Kamada-Langford-Saito によってカンドルホモロジー理論が導入された。曲面結び目のダイアグラムに対してカンドルホモロジーの3コサイクルに付随した状態和が定義できる。この状態和は曲面結び目の不変量であり、カンドルコサイクル不変量と呼ばれている。カンドルコサイクル不変量は曲面結び目の最小3重点数の評価や曲面結び目の非可逆性の判定などに有効であることが知られており、その他にも様々な応用が期待されている。私の研究目的はダイアグラム表示の観点から特異曲面結び目の幾何的な性質を調べることであり、昨年度の研究では特異曲面結び目のダイアグラムと密接な関係があるカンドルホモロジーを導入した。特異曲面結び目のダイアグラムに対して、この新たなカンドルホモロジーの3コサイクルに付随した状態和も同様に定義できる。（この状態和はおそらく特異曲面結び目の不変量になっている。）今後の研究ではコンピュータを使用することで新しく導入したカンドルホモロジー群や非自明な3コサイクルを求め、その応用として特異曲面結び目のダイアグラムの幾何的な性質などを調べたい。

(2) 特異曲面結び目の同値関係を生成するダイアグラムの局所変形について

曲面結び目をダイアグラム表示の観点から研究するためにはローズマン変形と呼ばれる7種類の局所変形が重要となる。その理由は次の定理が成り立つからである：2つの曲面結び目が同値であるための必要十分条件はそれらのダイアグラムがローズマン変形の有限列で移り合うことである。つまり7種類のローズマン変形は曲面結び目の同値関係を生成している。一方で特異曲面結び目とそのダイアグラムを考えたとき、同様の定理を得るにはノードに関わる局所変形も必要となる。その候補としてPN変形（ノード通過変形, passing a node through a sheet）と呼ばれる局所変形がある。特異曲面結び目の同値関係を生成するダイアグラムの局所変形はローズマン変形とPN変形と予想されている。本研究ではこの予想を解決したい。