問題 1 (1) 論文 [1] においては次の予想を提示した：以下の転置双対ペア $(Z_{13},\, J_{3,0})$, $(Z_{17},\, Q_{2,0})$, $(U_{16},\, U_{16})$, $(W_{17},\, S_{1,0})$, $(W_{18},\, W_{18})$, $(S_{17},\, X_{2,0})$, に対しては 以下の条件 $(**)$ をみたす定義多項式のコンパクト化 F, F' と反射的多面体 Δ と Δ' は存在しないであろう.

$$(**) \qquad \Delta^* \simeq \Delta',\, \Delta_F \subset \Delta,\, \Delta_{F'} \subset \Delta', \quad and \quad \mathrm{rk}\, L_0(\Delta) = 0$$

更に, $\rho(\Delta) + \rho(\Delta') = 20$ は決して起こり得ないだろう.

第一の問題はこの予想が正しいかどうかを判定することである. また, 例えば Rohsiepe による双対性 [2] など, 別の格子の双対性がみたされるかどうかを探したい.

(2) 第一の問題の後半部分では, 次の予想が正しいかどうかを判定したい:
以下の双対ペア $(Z_{1,0},\, Z_{1,0})$, $(U_{1,0},\, U_{1,0})$, $(Q_{17},\, Z_{2,0})$, $(W_{1,0},\, W_{1,0})$, に対して, 論文 [1] で得られた族のペア $(\mathcal{F}_\Delta,\, \mathcal{F}'_{\Delta'})$ は次の関係をみたす:

$$(\sharp) \qquad \mathrm{Pic}(\Delta)^{\perp}_{\Lambda_{K3}} \simeq U \oplus \mathrm{Pic}(\Delta').$$

問題 2 $K3$ 曲面は射影空間 $\mathbb{P}^2$ の非特異 6 次曲線 B で分岐する 2 重被覆 (の極小モデル) として構成されることはよく知られているが, その一般的な構成方法として, 重みが $(1,1,4)$, $(1,3,8)$, and $(1,4,5)$ である重み付き射影平面 $\mathbb{P}$ の, 非特異曲線 $B \in |-2K_Z|$ で分岐する 2 重被覆 (の極小モデル) としても構成される.

第二の問題は, 重み付き 2 次 $K3$ 曲面を $K3$ 曲面上の非特異曲線上の点の Weierstrass 半群を以って特徴付けることである. 逆に, 重み付き 2 次 $K3$ 曲面 が存在するべき分岐曲線が存在するための Weierstrass 点を分類したい.

問題 3 $K3$ 曲面から Lie 群への写像全体の集合のモジュライ空間を調べよ.

よく知られているように, 円から Lie 群への写像全体の集合は loop 群と呼ばれ, 微分方程式論との関わりがある. 楕円曲面の構造を持つ $K3$ 曲面は一般ファイバーが楕円曲線であるような $\mathbb{P}^1$ 上のファイバー付き曲面である. 楕円曲線は位相的にはトーラスと見なせ, それは 2 つの円の積である. このことから 2 次元ケースである $K3$ 曲面から Lie 群への写像全体の集合を, 1 次元ケースである, 円から Lie 群への写像全体の集合の一般化として調べることが可能であると考えている.

アプローチの手段として次のことが考えられる: 1) 楕円 $K3$ 曲面の前に性質がよく知られている **有理** 楕円曲面を研究する, 2) (もしあれば) (無限次元)Lie 群の $K3$ 曲面への作用の様子を調べる.

参考文献

[1] Mase, M. Polytope duality for families of $K3$ surfaces associated to transpose duality. *to appear in Commentalli Math. St. Pauli.*.

[2] Rohsiepe, F. Lattice polarized toric $K3$ surfaces. *arXive:hep-th/0409290v1* (2004).