本研究では以下の問題について研究している：

問題　全ての (Ebeling-Ploog の意味で) 転置双対ペア (B, B') は次のような格子の双対に拡張できるか, つまり, 特異点 B (resp. B') がある $K3$ 曲面族 $\mathcal{F}_\Delta$ (resp. $\mathcal{F}_{\Delta'}$) に対応していて, 双対

$$(\sharp) \qquad \mathrm{Pic}(\Delta)^{\perp}_{\Lambda_{K3}} \simeq U \oplus \mathrm{Pic}(\Delta')$$

が成り立つか？

論文 [2] では, 特異点の転置双対ペアであり $(\sharp)$ の意味で双対性を持つ例を幾つか発見することができた. しかしながら, 結論のまだ得られていない場合が数多く残されていた.

そこで論文 [1] では, 適切な族を構成することにより, 双対性 $(\sharp)$ を持ち得る候補を発見した：

主結果 以下の各転置双対ペア

$$(Z_{1,0}, Z_{1,0}), (U_{1,0}, U_{1,0}), (Q_{17}, Z_{2,0}), (W_{1,0}, W_{1,0}),$$

に対して 定義多項式のコンパクト化 F, F' と反射多面体 Δ, Δ' が存在して次の条件 $(**)$ をみたす:

$$(**) \qquad \Delta^* \simeq \Delta', \Delta_F \subset \Delta, \Delta_{F'} \subset \Delta', \quad \text{更に} \quad \mathrm{rk}\, L_0(\Delta) = 0.$$

従って, 族の Picard 格子の階数 $\rho(\Delta), \rho(\Delta')$ について $\rho(\Delta) + \rho(\Delta') = 20$ という関係をみたしていて, 得られた族 $\mathcal{F}_\Delta$ と $\mathcal{F}_{\Delta'}$ のペアは双対 $(\sharp)$ をみたす候補である. □

論文 [1] では更に, 次の予想を立てることができた: 転置双対な特異点のペア $(Z_{13}, J_{3,0})$, $(Z_{17}, Q_{2,0})$, (U_{16}, U_{16}), $(W_{17}, S_{1,0})$, (W_{18}, W_{18}), $(S_{17}, X_{2,0})$ に対しては条件 $(**)$ をみたすような反射的多面体を得ることはできないであろう.

結果として次の予想も得られた: 以下の双対ペア

$$(Z_{1,0}, Z_{1,0}), (U_{1,0}, U_{1,0}), (Q_{17}, Z_{2,0}), (W_{1,0}, W_{1,0}),$$

に対して, **主結果** の中で得られた族の組 $(\mathcal{F}_\Delta, \mathcal{F}'_{\Delta'})$ は次の関係をみたす:

$$(\sharp) \qquad \mathrm{Pic}(\Delta)^{\perp}_{\Lambda_{K3}} \simeq U \oplus \mathrm{Pic}(\Delta').$$

参考文献

[1] Mase, M. Polytope duality for families of $K3$ surfaces associated to transpose duality. *to appear in Commentalli Math. St. Pauli.*.

[2] Mase, M. A mirror duality for families of $K3$ surfaces associated to bimodular singularities. *Manuscripta Math.(online 26 September 2015) 149*, 3–4 (2016), 389–404.