これまでの研究成果まとめ

大野 晋司

Riemann 多様体への群作用は, その軌道として部分多様体の例を豊富に与える. 特に Riemann 対称空間の線型イソトロピー表現やイソトロピー作用の軌道は, ルート系を用いて詳細に調べることができる. また, イソトロピー作用の一つの一般である Hermann 作用の軌道は, 既約ルート系の一般化である対称三対を用いて調べることができる. 対称三対の概念は井川が導入した概念である. 私は、ルート系及び対称三対を用いて以下の研究を行ってきた.

面積最小錐に関する研究 S を Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 内の単位球面とし B を S の部分多様体とする. $C_B := \{tx \mid x \in B, 0 \leq t\}$ を B 上の錐と呼ぶ. 一般に C_B は原点において錐状の孤立特異点を持つ. $C_B^1 := \{tx \mid x \in B, 0 \leq t \leq 1\}$ が B を境界に持つ整カレントとして面積最小であるとき, C_B を面積最小錐という. C_B への面積非増加レトラクションが存在すれば, C_B は面積最小である. 私は, 広橋, 菅野, 田崎が行った, 対称 R 空間上の錐への面積非増加レトラクションの構成定理を拡張し, 次の定理を示した.
定理 1. 階数 2 の既約対称空間の線型イソトロピー表現の孤立軌道として得られる極小 R 空間上の錐は 7 つの例外を除いて面積最小である.
定理 2. ある仮定を満たす二つの面積非増加レトラクションから新たに別の面積非増加レトラクションを構成できる.
なお, この研究は酒井高司氏との共同研究である.

弱鏡映部分多様体に関する研究 井川, 酒井, 田崎が導入した弱鏡映部分多様体の概念は, 鏡映部分多様体の拡張概念である. 弱鏡映部分多様体が導入された論文において, 対称空間の線型イソトロピー作用の弱鏡映軌道の分類は既に完了している. この研究では, 可換なコンパクト対称三対が誘導する可換な Hermann 作用及びコンパクト Lie 群への作用の弱鏡映軌道の構成を行った. 弱鏡映部分多様体は, austere 部分多様体であるため, austere 軌道の弱鏡映性を示せば良い. 可換な Hermann 作用の austere 軌道は井川によって分類されている. 可換なコンパクト対称三対が誘導する Lie 群への作用の軌道の第二基本形式を対称三対を用いて表し, austere 軌道を分類した. 次に, これらの austere 軌道が弱鏡映となるための十分条件を対称三対の言葉で表した. この十分条件を用いて, コンパクト対称空間及びコンパクト Lie 群内の弱鏡映部分多様体の例を数多く構成した.

二重調和部分多様体に関する研究 調和写像に関する研究は多くの研究者達によって古くからなされてきた. 調和写像はエネルギー汎関数の極値を与える写像として定義される. この定義は写像が等長はめ込みの場合, 極小はめ込みの定義に一致する. 調和写像の自然な拡張の一つとして二重調和写像の概念がある. それは bi-energy と呼ばれる張力テンソルの長さの二乗の積分で定義される汎関数の極値を与える写像として定義される. 調和写像は二重調和写像である事が知られている. 調和写像と二重調和写像はともに局所的にはある種の Euler-Lagrange 方程式で特徴付けられる. したがって二重調和写像を一般に得ることは非常に困難であると言える. しかしながら, 浦川肇氏の最近の研究によって, 平均曲率ベクトルが法接続に関して平行な超曲面の場合の二重調和写像の条件が, 第二基本形式と Ricci 作用素の関係で特徴付けられることがわかった. このことを用いて, 余等質性 1 の可換な Hermann 作用と Lie 群への作用の主軌道として得られる等質超曲面の二重調和性を対称三対を用いて特徴づけた. この方法では扱いが難しい例外型の対称空間の二重調和超曲面の新しい例が得られる点に注意する. なお, この研究は酒井高司氏, 浦川肇氏との共同研究である.

E-mail address: kudamono.shinji@gmail.com