これまでの研究成果のまとめ

筆者は 楕円 Ruijsenaars 系や楕円 Ding-Iohara-Miki 代数に関連する研究を行っている. 最初に背景について説明する. 多体問題は古典系, 量子系ともに解くのが難しいことが知られているが, 楕円 Ruijsenaars 系という (Liouville 可積分の意味で) 解ける量子多体系の存在が知られている. この模型のハミルトニアンを以下では 楕円 Ruijsenaars 作用素と呼ぶが, これはテータ関数を含んでいるので, 楕円 Ruijsenaars 系は楕円関数的な模型である. 楕円 Ruijsenaars 作用素の中のテータ関数が三角関数に退化している場合 (以下では三角 Ruijsenaars 系と呼ぶ) のハミルトニアンは, 本質的には Macdonald 作用素と呼ばれる q-差分作用素に等しいことがわかる. このとき次が知られている.

- 三角 Ruijsenaars 系のエネルギー固有関数は Macdonald 多項式によって与えられる.
- Macdonald 作用素の自由場表示を通じて Ding-Iohara-Miki 代数と呼ばれる量子群が現れる.

これに対し, 楕円関数的な場合である 楕円 Ruijsenaars 作用素のエネルギー固有状態を求める問題は未解決である. では, 楕円 Ruijsenaars 系からは, Ding-Iohara-Miki 代数の表現のようなものは出てこないのか ? という問いが自然に考えられる. この問題に関して筆者が得ている結果を簡潔に述べると次のようになる.

- 楕円 Ruijsenaars 作用素は, ボソンをうまく使うことで自由場表示できる.
- 楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 (Ding-Iohara-Miki 代数の楕円関数化) が得られる.

これを図式化すると次のようになる.

$$\begin{tikzcd}
\text{楕円 Ruijsenaars 作用素} \arrow[r, "\text{自由場表示}"] & \textbf{楕円 Ding-Iohara-Miki 代数} \\
\text{Macdonald 作用素} \arrow[u, "\text{楕円化}"'] \arrow[r, "\text{自由場表示}"] & \text{Ding-Iohara-Miki 代数} \arrow[u, "\text{楕円化}"']
\end{tikzcd}$$

物理との関連では, Ding-Iohara-Miki 代数の表現を調べることが 5 次元版 AGT 予想を理解する上で重要であると考えられている. よって, 筆者が導入した楕円 Ding-Iohara-Miki 代数は 6 次元版 AGT 予想と何らかの関係を持っている可能性がある. また, 筆者が 楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示を構成する際に用いた方法が Iqbal-Kozcaz-Yau, Nieri らによっても用いられ, q-Virasoro 代数の楕円関数化が考えられている. このように, 数理物理において 楕円 Ruijsenaars 系や楕円 Ding-Iohara-Miki 代数の表現に関連した展開が更に起こるものと思われる.