

これまでの研究成果のまとめ

佐藤 敬志

(1) 理論的背景

Goresky, Kottwitz, MacPherson により、良いトーラス作用を持つ多様体の幾何的な情報はその作用の固定点と 1 次元軌道に注目することで十分に取り出せることが示された [1]。これは GKM 理論と呼ばれる。例えばそのトーラス作用による同変コホモロジー環などの情報を得ることができる。

G を単連結なコンパクト Lie 群とし、その極大トーラスを T とすると G/T は通常の旗多様体である。旗多様体には T が左からの積により作用しており、この作用に関して GKM 理論が適用できる。この場合、固定点の集合は G の Weyl 群と対応し、特に Bruhat 分解のセルに対応している。このセル分解はルート系と Weyl 群の情報で構成されており、これに基づいて同変コホモロジー環を組合せ論的に取り扱えるという側面が GKM 理論にはある。もちろんセル分解に基づいているので幾何的な意味を把握しやすいという利点もある。

(2) 先行研究と私の結果

Lie 群 G が C 型以外の古典型の場合と G_2 型の場合には既にその同変コホモロジー環は他の研究者により決定されている。私は F_4 型と E_6 型の旗多様体に挑み、先行研究者とは全く異なった発想でその整係数同変コホモロジー環を明示的に多項式環を関係式で割った環として決定した。特に一般旗多様体からなる同変ファイバー束という視点を導入して、GKM 理論版の Leray-Hirsch の定理を得た [2]。この定理は Weyl 群の組合せ論的な構造を用いることで、同変コホモロジーの環構造まで決定できるという点で通常の Leray-Hirsch の定理より強力である。この定理を用いて、底空間に可能な限り大きい古典型の旗多様体を取ることで、例外型特有の複雑さを小さいファイバーに抑え込み上記のコホモロジー環の明示的な決定に至った。また、私は Bruhat 分解に立ち返って GKM 理論を再考察して、 C 型の旗多様体の同変コホモロジー環を整係数で決定した。

これとは別に Hessenberg 多様体と呼ばれる旗多様体の subvariety についても、私を含む 5 人の共同研究で非常に大きな成果を得た [3]。内容を簡単に説明すると以下の通りである。Hessenberg 多様体は、正ルート系の“良い”部分集合に対して定まる旗多様体の subvariety である。一方、正ルート系の部分集合は $\text{Lie}(T)$ 内の超平面配置を与える。この超平面配置と Hessenberg 多様体の深い関わりを我々は示した。ある条件を満たす Hessenberg 多様体にはセル複体の構造が入り、このセル複体の各セルの次元とその個数は上記の超平面配置から定まる領域の言葉で記述されることを発見した。これは旗多様体の Bruhat 分解が Weyl 領域を用いて記述されることの一般化になっている。この観点は革新的で Hessenberg 多様体と超平面配置を結び付けることに成功した。そのような Hessenberg 多様体のコホモロジー群の記述は既に知られていて、上記の新観点から超平面配置で記述されることが従うが、その環構造まで超平面配置により記述されることを証明したことが我々の 2 つ目の結果である。環としての生成元さえ知られていなかったが、 $H^*(BT)$ を regular sequence で生成されるイデアルで割った環と同型であるという結果を得た。特に regular sequence の元の次数については正ルート系の部分集合からルートの高さに注目して読み取ることができ、このことも旗多様体の場合の一般化となっている。

REFERENCES

- [1] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson, Equivariant cohomology, Koszul duality and the localization theorem, *Invent. Math.* **131** (1998), no. 1, 25-83.
- [2] T. Sato, The T -equivariant integral cohomology ring of E_6/T , arXiv:1406.3893.
- [3] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai, T. Sato, Hessenberg varieties and hyperplane arrangements, arXiv:1611.00269.