今後の研究計画

鈴木　新太郎

ランダム β-変換の絶対連続不変測度に対する測度論的エントロピーと線形応答公式の研究

$\beta > 1$ を非整数, $p \in (0,1)$ とする．これまでの研究で述べたように, ランダム β-変換 K_β は, $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times [0,[\beta]/(\beta-1)]$ 上で定義され, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上の $(1-p,p)$-Bernoulli 測度 m_p と区間 $[0,[\beta]/(\beta-1)]$ 上の正規化された Lebesgue 測度 λ_β による直積測度 $m_p \otimes \lambda_\beta$ に関して絶対連続な確率不変測度 $\hat{\mu}_{\beta,p}$ をただ 1 つ有し, それは直積測度 $\hat{\mu}_{\beta,p} = m_p \otimes \mu_{\beta,p}$ であらわされる．Dajani と de Vries は論文 [1] において, β が特殊な代数的整数の場合に, ランダム β-変換の絶対連続不変測度 $\hat{\mu}_{\beta,p}$ に対する測度論的エントロピー $h_{\hat{\mu}_{\beta,p}}(K_\beta)$ を計算し, 一般のランダム β-変換の場合に成り立つであろう測度論的エントロピーの明示公式を予想した．本研究では, その明示公式の証明を試みるとともに, パラメータ (β,p) に関するエントロピー $h_{\hat{\mu}_{\beta,p}}(K_\beta)$ の挙動について考察する．とくに, 確率測度 $\mu_{\beta,p}$ の密度関数 $f_{\beta,p}$ を用いて定義される関数 $p \mapsto f_{\beta,p}$ は解析的となることから, 関数 $p \mapsto h_{\hat{\mu}_{\beta,p}}(K_\beta)$ はなめらかな関数となり, その最大値最小値問題を論じることは興味深い．　パラメータ p に関するエントロピー $h_{\hat{\mu}_{\beta,p}}(K_\beta)$ の挙動を考察する際の手段の 1 つとして, 関数 $p \mapsto f_{\beta,p}$ の N 回微分 $\dfrac{\partial^N f_{\beta,p}}{\partial^N p}$ に対する線形応答公式に相当するものを見出し, それをパラメータ p に関するエントロピー $h_{\hat{\mu}_{\beta,p}}(K_\beta)$ の最大値最小値問題に適用するということが考えられる．よって $p \mapsto f_{\beta,p}$ の線形応答公式に相当するものを与えるとともに, それをエントロピーの明示公式と結びつけ, エントロピーの挙動を解析することを目指す．また, その線形応答公式の証明を, より広いランダム力学系のクラスに対し拡張することを試みる．

Bernoulli convolution と β-展開に関する研究

$1 < \beta \leqq 2,\ 0 < p < 1$ とする．m_p で $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上の $(p,1-p)$-Bernoulli 測度をあらわすとする．関数 $g_\beta : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ を $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ に対し

$$g_\beta((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\beta^n}$$

で定める．β-展開との関連から, パラメータ (β,p) に関する Bernoulli convolution $\nu_{\beta,p}$ を確率測度 m_p に関する関数 g_β の分布 $\nu_{\beta,p} = m_p \circ g_\beta^{-1}$ で定義する．Bernoulli convolution $\nu_{\beta,p}$ は $[0,[\beta]/(\beta-1)]$ をサポートにもつ実数上の自己相似測度であり, 各パラメータ (β,p) ごとに $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度に関し絶対連続もしくは特異のいずれかとなることが知られている．また, $\beta = 2$ の場合, Bernoulli convolution $\nu_{\beta,p}$ の分布関数は p をパラメータとする Lebesgue の特異関数であり, $x \in [0,1]$ におけるその値は, x の 2 進小数表示から得られることが知られている．本研究では, $\beta = 2$ の場合と同様の類推で, 数の β-展開と Bernoulli convolution を考察し, β の代数的性質と Bernoulli convolution の性質との関連付けを目指す．Bernoulli convolution の分布関数 は, p をパラメータとする Lebesgue の特異関数と類似の関数方程式をみたしていることから, その方程式から得られている結果の拡張を試みる．例えば, 各点 x における Bernoulli convolution の分布関数の値を x の β-展開から与えることができるか検証する．

参考文献

[1] K. Dajani and M. de Vries, *Invariant densities for random β-expansions*, J. Eur. Math. Soc. **9** (2007), 157–176.