これまでの研究成果のまとめ

鈴木　新太郎

$\beta > 1$ とする. $[\beta]$ で β 未満の最大の整数をあらわすとする. 整数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{0, 1, \cdots, [\beta]\}^{\mathbb{N}}$ を用いて与えられる実数 $x \in [0, [\beta]/(\beta - 1)]$ の展開

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\beta^n}$$

を x の β-展開という. β が 2 以上の整数であるとき, 可算個の点を除き各点 $x \in [0, [\beta]/(\beta - 1)]$ はただ 1 つの β-展開をもつことはよく知られている. しかし β が非整数のとき, Lebesgue 測度に関してほとんどいたるところの点 $x \in [0, [\beta]/(\beta - 1)]$ は非可算個の β-展開をもち, その統計的性質は大変興味深い. β-展開の統計的性質は, それを生成する力学系のエルゴード理論的性質と密接に関係している. これまで私は β-展開やその一般化と考えられる数の展開を生成する力学系のエルゴード理論に関する研究を行い, いくつかの結果を得た. 以下ではその成果について述べる.

1. 一般化された β-変換の Artin-Mazur ゼータ関数とラップカウンティング関数

β-変換 τ_β は, $x \in [0, 1]$ に対し $\tau_\beta(x) = \beta x \bmod 1$ で定義される. 変換 τ_β により x の greedy β-展開が得られることはよく知られている. Flatto らは論文 [3] において, 1 の greedy β-展開の展開係数に対する母関数 ϕ_β を用い, 複素平面上のある領域上で定義される Artin-Mazur ゼータ関数に関する関数等式を与えた. 一般に, 区分的線形拡大写像におけるすべてのブランチの傾きの絶対値が一定である場合, Artin-Mazur ゼータ関数の極は写像のエルゴード的性質を反映することが知られており, その考察は重要である. 私は, Flatto らによる結果を, Góra により論文 [4] で導入された, β-変換の傾き正のブランチが傾き負となる場合も許容するような変換族（一般化された β-変換）の場合まで拡張した. また得られた関数等式を用いて, 変換の Artin-Mazur ゼータ関数の解析的性質と β の代数的性質の関連性を考察した (論文リスト 1).

また Flatto らは論文 [3] において, 変換のラップカウンティング関数に対しても母関数 ϕ_β を用いて関数等式を与え, β-変換の Artin-Mazur ゼータ関数とラップカウンティング関数の極が位数をこめて一致することを示している. 私は, Flatto らによって与えられた関数等式を, 一般化された β-変換族を含む場合まで拡張した. また得られた関数等式を用いて, 各ブランチの傾きが負となる場合 (negative β-変換) を含む特殊なケースにおいては, これら 2 つの関数の極が位数をこめて一致することを示した (論文リスト 2).

2. ランダム β-変換の不変密度関数

Dajani と Kraaikamp は 論文 [1] において, β-変換 τ_β を区間 $J_\beta := [0, [\beta]/(\beta - 1)]$ 上に自然に拡張した変換 $T_{\beta,1}$(greedy map) と, 反転写像 $l_\beta(x) = [\beta]/(\beta - 1) - x$ $(x \in J_\beta)$ を用いて定義される, 変換 $T_{\beta,1}$ に共役な変換 $T_{\beta,0} = l_\beta \circ T_{\beta,1} \circ l_\beta^{-1}$ (lazy map) を定め, それらをランダムに作用させるような $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times J_\beta$ 上のランダム力学系 K_β (ランダム β-変換) を導入した. ランダム β-変換 K_β を用いると, 各点 $(\omega, x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times J_\beta$ の変換 K_β による軌道を用いて, x の β-展開を得ることができる. それをランダム β-展開とよぶ. ランダム β-展開により, 各点 $x \in J_\beta$ のすべての β-展開が得られることが知られており, この力学系のエルゴード理論的性質から β-展開の統計的性質を考察することが可能となる. Dajani と de Vries は論文 [2] において, 変換 K_β に対し, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 上の $(1 - p, p)$-Bernoulli 測度 m_p $(0 < p < 1)$ と J_β 上の正規化された Lebesgue 測度 λ_β の直積測度 $m_p \otimes \lambda_\beta$ に関して絶対連続であるような不変確率測度がただ 1 つ存在することを示した. 一般論により, その不変確率測度は直積測度 $m_p \otimes \mu_{\beta,p}$ で表すことができ, さらに可測力学系 $(K_\beta, m_p \otimes \mu_{\beta,p})$ はエルゴード的になる. 私は, $(K_\beta, m_p \otimes \mu_{\beta,p})$ がエルゴード性よりも強い exact 性をもつことを示した. また, 変換 K_β の不変確率測度 $m_p \otimes \mu_{\beta,p}$ に対し, 確率測度 $\mu_{\beta,p}$ の密度関数 $f_{\beta,p}$ を明示的に与えた. この明示式により, ランダム β-展開に関する統計量の定量的評価が可能となる. さらに, λ を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とするとき, 密度関数 $f_{\beta,p}$ の明示式を用いて, 関数 $p \to f_{\beta,p} \in L^1(\lambda)$ が解析的となること, および関数 $\beta \to f_{\beta,p} \in L^1(\lambda)$ がある代数的整数の集合上を除き連続となることを示した (論文リスト 3).

参考文献

[1] K. Dajani and C. Kraaikamp, *Random β-expansions*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **23** (2003), 461-479.

[2] K. Dajani and M. de Vries, *Invariant densities for random β-expansions*, J. Eur. Math. Soc. **9** (2007), 157–176.

[3] L. Flatto, J. C. Lagarias and B. Poonen, *The zeta function of the beta transformation*, Ergod.Th. & Dynam. Sys. **14** (1994), 237–266.

[4] P.Góra, *Invariant densities for generalized β-maps*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **27** (2007), 1583–1598.