今後の研究計画

ラグランジュ部分多様体を平均曲率流に沿って変形していくと, 一般には途中で特異点が現れ, そのまま変形を続けることはできない状態になる. そこで Thomas は, ラグランジュ部分多様体に対して “安定性” の概念を導入し, Yau と共に「最初のラグランジュ部分多様体 L_0 が安定ならば, その平均曲率流 L_t は途中で特異点を形成することはなく, 最後まで (時間無限大まで) 流れ続け, 最終的にはハミルトン変形類の中の一意的な特殊ラグランジュ部分多様体 L_∞ に収束する」と予想した. この予想を Thomas-Yau 予想という.

現在は Thomas-Yau 予想の前段階である「最初のラグランジュ部分多様体 L_0 が “グレイデッド” ならば, その平均曲率流 L_t は I 型特異点を形成することはない」という主張の厳密な証明に興味を持っている. これは Thomas-Yau 予想が真であるためには成立して欲しい主張であり, いくつかの具体的な場合や特殊な条件を課した場合には実際に証明されている. しかし真に一般の場合には証明されていない. 平均曲率流の特異点には一般型と特殊型という 2 つの概念が存在する. 特殊型は一般型である. 現時点では上記主張の「I 型特異点」の部分を「特殊 I 型特異点」に限定した主張には厳密な証明が与えられているが, 「一般 I 型特異点」にした場合の厳密な証明は無いと思われる.

この問題の一つの解決策は「平均曲率流の一般 I 型特異点は実は全て特殊 I 型特異点である」を証明することである. ちなみに逆は定義から自明に真である. これはラグランジュ平均曲率流ではなく純粋に平均曲率流の問題である. リッチフローの場合は「一般 I 型特異点は実は全て特殊 I 型特異点である」という主張は真である. 証明の鍵は「一点でスカラー曲率がゼロになる勾配縮小リッチソリトンはガウスソリトンに限る」という結果である. これは「勾配縮小リッチソリトンの剛性」と呼ばれる. 平均曲率流の場合の先行研究としては Stone の結果がある. Stone は $\mathbb{R}^{n+1}$ の中を平均曲率流に沿って動く部分多様体の余次元は 1 であり平均曲率がゼロ以上 ($H \geq 0$) であることも仮定する. すると, この仮定の下では 「一般 I 型特異点は実は全て特殊 I 型特異点である」ということが証明できる.

Stone の結果で大切なのは以下の 3 つの仮定である. (1) 外の空間はユークリッド空間である. (2) 部分多様体は余次元 1 である. (3) 平均曲率はゼロ以上である. 証明の鍵は Huisken による余次元 1 の平均曲率ゼロ以上の self-shrinker の分類である. Stone の証明自体は背理法で, 一般 I 型特異点で特殊 I 型特異点ではないものが存在すると仮定すると「$H \geq 0$ かつ 1 点で第二基本形式がゼロになる self-shrinker で平面ではないもの」がバブルオフする. しかし, Huisken の分類により, そのような self-shrinker は存在しない.

Huisken の分類は余次元を上げることも, 平均曲率ゼロ以上という仮定を外すこともおそらく困難である. 例えば, 分類ではなく, 何らかの別の方法により「1 点で第二基本形式がゼロになる self-shrinker は平面に限る」という主張, つまり「self-shrinker の剛性」が証明できれば, 「平均曲率流の一般 I 型特異点は実は全て特殊 I 型特異点である」を証明することができる. 従って「self-shrinker には剛性があるか？」という問題が重要になるが, 「勾配縮小リッチソリトンの剛性」の場合と同様の議論は上手く行かず, 今のところ真偽は不明である.

Stone の論文は 1994 年出版であるが, その後 2011 年に Le-Sesum が「平均曲率流の一般 I 型特異点は実は全て特殊 I 型特異点である」という予想に新しい貢献をした. 主結果は外の空間がユークリッド空間であれば予想は真であるというものである. Stone が課していた上記の (2) と (3) の仮定を外している. Le-Sesum の証明には検証困難な箇所が多々あるが, 証明のアプローチが非常に興味深い. Chen-Yin が証明した平均曲率流に対する pseudolocality theorem を使う. pseudolocality theorem はもともとは Perelman がリッチフローに対して証明したものであるが, 2007 年に Chen-Yin がその平均曲率流バージョンを与えた. ただし, その証明にも現時点では厳密に理解することが困難な箇所がいくつかある. そこで 2017 年度は, Chen-Yin の平均曲率流に対する pseudolocality theorem の検証, 精密化, 一般化に挑戦したい.