これまでの研究成果

専門は微分幾何学であり, 最近の研究キーワードは特殊ラグランジュ部分多様体と平均曲率流である. 特殊ラグランジュ部分多様体, 平均曲率流ともにミラー対称性において重要な対象の一つである. 特殊ラグランジュ部分多様体は Calabi–Yau 多様体の中の極小なラグランジュ部分多様体であり, 局所的には非線形偏微分方程式の解として定義されるため, 大域的な具体例を構成することは難しい. 2011 年の時点で知られていた具体例は, Harvey-Lawson と Joyce によるもので, 両者共に, 複素平面 $\mathbb{C}^m$ 内で構成されたものであった. それらの構成方法の特徴だけを抽出し, 論文 [3] においてトーリック佐々木多様体の錐の中に特殊ラグランジュ部分多様体の具体例を構成した.

ラグランジュ平均曲率流に沿ってラグランジュ部分多様体の体積は最も効率良く減少していく. 従って (時間無限大まで解が存在し, 曲率が爆発しなければ) 最後に特殊ラグランジュ部分多様体が得られる. ラグランジュ平均曲率流に関しては Lee-Wang の $\mathbb{C}^m$ 内での例が知られていた. その具体例を論文 [2] においてトーリック概カラビヤウ多様体の中に拡張した. このラグランジュ平均曲率流の具体例は途中で特異点を有限回形成し, さらに特異点を形成する前後でラグランジュ部分多様体のトポロジーが変わるという現象を捉えている.

この例が示す通り, ラグランジュ平均曲率流は一般には途中で特異点を形成する. 平均曲率流の特異点形成に関して, 外の空間が $\mathbb{R}^m$ の場合には Huisken による先行結果がある. その結果を二木昭人氏と服部広大氏との共著論文 [1] において, リーマン錐多様体に対して拡張した. その主結果は「平均曲率流が I 型特異点を形成する場合, その特異点の近傍を拡大すると, 自己縮小解が得られる」というものである. 論文 [5] において, この結果をさらに (縮小勾配リッチソリトンから生成される) リッチフローと平均曲率流の混合方程式に対して拡張した.

$\mathbb{R}^m$ 内の自己相似解に対しては多くの先行研究が存在する. それらの先行研究が論文 [5] で縮小勾配リッチソリトン内に対して拡張された意味での自己相似解に対しても同様に成立するかを調べることができる. 論文 [4] では, Futaki-Li-Li による $\mathbb{R}^m$ 内の自己相似解に対する直径の評価は, ラグランジュ部分多様体という仮定の下では, 縮小勾配リッチソリトン内に対して拡張された意味での自己相似解に対しても同様に成立するということを証明した. この論文では, さらに Cao-Li の結果の拡張も行っている.

論文 [6] ではリッチフローと平均曲率流の混合方程式の具体例を構成した. この混合方程式をリッチ平均曲率流と呼ぶ. 外の空間は Cao 及び小磯によって構成された射影空間上の $\mathbb{P}^1$ 束上のケーラーリッチソリトンである. この中に自然に埋め込まれているレンズ空間のリッチ平均曲率流の下での挙動を調べ, 半径がある値より大きなレンズ空間は ∞-切断の像へ, 半径がある値より小さなレンズ空間は 0-切断の像へ崩壊することが分かった. これによって抽象論だけで推し進めていたリッチ平均曲率流の研究に初めて非自明な具体例が与えられた.

参考文献

[1] A. Futaki, K. Hattori and H. Yamamoto. Self-similar solutions to the mean curvature flows on Riemannian cone manifolds and special Lagrangians on toric Calabi-Yau cones, Osaka J. Math., 51(2014), no. 4, 1053–1079.

[2] H. Yamamoto. Weighted Hamiltonian stationary Lagrangian submanifolds and generalized Lagrangian mean curvature flows in toric almost Calabi-Yau manifolds, Tohoku Math. J., 68(2016), no. 3, 329-347.

[3] H. Yamamoto. Special Lagrangians and Lagrangian self-similar solutions in cones over toric Sasaki manifolds, New York J. Math., 22(2016) 501-526.

[4] H. Yamamoto. Lagrangian self-similar solutions in gradient shrinking Kähler-Ricci solitons, to appear in J. Geom.

[5] H. Yamamoto. Ricci-mean curvature flows in gradient shrinking Ricci solitons, arXiv:1501.06256, 43 pages, 2015.

[6] H. Yamamoto. Examples of Ricci-mean curvature flows, arXiv: 1608.04944, 18 pages, 2016