今後の研究計画

山崎陽平

これまで研究した横方向不安定性の研究を踏まえて, 次の内容について研究する.

(1) 様々な方程式に対する横方向不安定性の研究

本研究を行う上で重要になるのが, 横方向不安定性の研究である. 定在波周りの解挙動の研究は, 扱う方程式により, 問題の難しさが左右される. 様々な方程式について, 定在波の安定性や線形化作用素を研究し, 解析しやすい具体的な定在波と方程式を探す.

さらに, 今まで研究した方程式について, 不安定な定在波の近くの解の振る舞いをより詳しく調べる. 退化型の安定性の議論の先行結果である Comech と Pelinovsky の結果では不安定な定在波の周辺の解が中心多様体の近傍でどう振る舞うかを詳細に解析し, 不安定性を示していた. 分岐点における定在波でには Comech と Pelinovsky の結果は適用できないが, これまでの研究 (ii) の議論と組み合わせることで, 不安定定在波の周辺の解が中心多様体の近傍でどのように不安定化するか研究する.

(2) 不安定な定在波が漸近する解軌道の存在（中心安定多様体の存在）

多くの場合, 不安定な進行波の近くの解はいくつかの安定な進行波と散乱部分に分裂すると考えられている. この問題は完全可積分系である 1 次元 3 次 NLS や KdV 方程式などでは知られているが, 非可積分系である (ZK) などでは大変難しい問題である. この問題の足掛かりとして, $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ 上の (ZK) の不安定化した線状進行波周りの中心安定多様体について調べる. 分岐点近くの線状進行波周りの中心安定多様体が構成できれば, 線状進行波の分岐とその周りの解の挙動の関係を調べる手がかりとなりうる.

中心安定多様体を構成するとき, 次の点が問題になる. 空間 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ が $\mathbb{T}_L$ 方向にコンパクトであるため, 分散性が低い. 故に, Strichartz 評価などでは中心安定多様体を構成するのに必要な散乱部分の時間減衰が得られない. また, 定常方程式の線形化作用素は虚軸に無限個の固有値を持つため, 線形化作用素から分散性を引き出すことが難しい.

そこで, まず, Nakanishi–Schlag'12 の非線形 Klein–Gordon 方程式に対する, 軌道安定の意味での中心安定多様体を構成する. その後, 漸近安定性を示したときの Martel–Merle の議論を用いて, 中心安定多様体に含まれる解が進行波に漸近することを示す.

(3) KP-I 方程式と ZK 方程式の多重進行波解の研究

数値計算などにより, KP-I 方程式では, 不安定な線状定在波から離れる解で, 「小さな線状定在波と 2 次元的な定在波に分裂する解」の存在が知られている. この数値計算により, 不安定な線状定在波から離れる解で, 性質の異なる多重進行波に漸近するものが存在すると考えられる. ゆえに, 多重進行波の存在と安定性を調べることで, 不安定な線状定在波から離れる解の解挙動をとらえる.

これまでの研究成果 (iii) により, 線状進行波から分岐した 2 次元的な進行波が漸近安定であることが得られる. Martel–Merle の議論を用いて多重進行波解の存在と安定性を示す. ZK 方程式の線形化方程式の群速度は負であるが, KP-I 方程式の線形化方程式の群速度は符号変化しうる. そのため, KP-I 方程式では, 群速度の非正値であることを用いて導出される Liouville 型定理を示すことは難しい. ゆえに, KP-I 方程式に対しては, 分散性の性質から, 定在波の漸近安定性は示すことは難しいので, 軌道安定性を調べる.

(4) 不安定な定在波から離れる解の漸近挙動

研究成果 (iii) より, 小さな進行波を無視すれば, 不安定な線状進行波から離れる解はある進行波に漸近することがわかる. しかしながら, 離れた解がどの進行波に漸近しうるか, どの進行波に漸近する解が主要であるかは示せていない. 不安定な線状進行波に収束する解の情報や分岐点となる線状進行波の周りでのエネルギー構造, virial 等式の構造を利用して, 離れた解の詳細な漸近挙動を調べる.