これまでの研究成果のまとめ

山崎陽平

私がこれまで研究してきた線状定在波の安定性の研究成果について, 以下で説明する.

(i) 2 連立非線形 Schrödinger 方程式系の横方向不安定性の研究

本研究では, 空間 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ で定義された 2 連立非線形 Schrödinger 方程式系 (以下 (2NLS) と表記) の線状定在波について横方向不安定性を示した. ただし, $\mathbb{T}_L=\mathbb{R}/2\pi L\mathbb{Z}$. ここで, 線状定在波とは空間 $\mathbb{R}$ 上の (2NLS) の定在波を空間 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ 上の (2NLS) の定在波とみなしたものである. 横方向不安定性とは, 空間 $\mathbb{R}$ 上の (2NLS) で安定であった定在波が横方向 $\mathbb{T}_L$ の影響により線状定在波として不安定であることをいう. 線状定在波はエネルギー最小な定在波と一般には異なるため, 変分法的な議論だけでは安定性を示すことは難しい. 先行結果である Rousset–Tzvetkov'08 の議論では, 非線形項が Fréchet 微分の意味での滑さを仮定しており, 滑らかでない非線形項をもつ (2NLS) には適用できない. さらに, 空間 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ はコンパクトな方向 $\mathbb{T}_L$ があるため, 分散性が低く, Georgiev–Ohta'12 などの議論では, 線形不安定性から軌道不安定性を導くことが困難であった. 本研究では, 方程式の変分構造と不安定化する解の性質を用い, 非線形項からくる高いフーリエ波数を制御し, L が臨界周期以外のときの線状定在波の安定性を決定した.

(ii) 臨界周期における非線形 Schrödinger 方程式の線状定在波の安定性の研究

横方向不安定になる線状定在波に対しては, しばしば安定性と不安定性の境目となる臨界周期が存在する. 臨界周期においては, 対称性の破れ分岐により, 線状定在波周りの線形化作用素が退化している. この退化により, 安定性を示す際に用いられる Vakhitov–Kolokolov 安定性条件では, 臨界周期の線状定在波の安定性を示せない. さらに, Comech–Pelinovsky'03 や Maeda'12 などの先行結果で扱われている退化と異なり, 臨界周期では定常方程式の線形化作用素が退化している. 故に, 安定性を示すことが困難であった.

本研究では, 空間 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ で定義された非線形項 $|u|^{p-1}u$ を持つ Schrödinger 方程式 (以下 $(\mathrm{NLS})_p$ と表記) について, 臨界周期に対する線状定在波の安定・不安定性を示した. 線形化作用素の退化を補うために, 線状定在波の分岐の情報を用いて, リャプノフ関数の 4 次の評価を得た. さらに, 得られた 4 次の評価を用いて, 分岐点にあたる定在波の安定・不安定性の判定条件を求め, 臨界周期における安定性が非線形項の指数 p によって変化することを示した. さらに, , 線形ポテンシャル付きの $(\mathrm{NLS})_p$ (以下 $(\mathrm{NLSWP})_p$ と略記) の線状定在波の軌道安定・不安定性を研究した. $(\mathrm{NLS})_p$ では, 非線形性を詳細に評価できず, 非線形項の指数 p の意味での安定性と不安性の臨界指数を得られなかった. $(\mathrm{NLSWP})_p$ は小さな線状定在波を持つため, 非線形性を詳細に評価できた. この評価により, $(\mathrm{NLS})_p$ の研究で得られた判定条件を用いて, $p\geq 2$ とすべての周期について安定・不安定性を決定した. これにより, $(\mathrm{NLSWP})_p$ に対し, 臨界指数 p_* を決定した.

(iii) Zakharov–Kuznetsov (ZK) 方程式の線状進行波の安定性の解析

本研究では, ZK 方程式の線状進行波に対し, (ii) に対する議論, Rousset–Tzvetkov'09 の議論と Pego–Weinstein'94 の線形作用素の解析を用いて, すべての周期 L において (軌道) 安定・不安定性を決定した. ZK 方程式において, 漸近安定性を示すには, 極限集合が進行波であることを表す Liouville 型定理を用いる Martal–Merle の議論が有用である. しかし, 臨界周期では線形化作用素の退化により, 先行研究の議論では Liouville 型定理が示せない. この問題を解決するために, 変調した進行波と解との差の方程式を立て, 線形化作用素の退化を補った. Liouville 型定理を示すには, 方程式の解の群速度を調べる virial 型評価を用いるが, 退化の補正により, vrial 型評価に余分な主要項が出てくる. virial 型評価を修正することでこの主要項を制御し, 分岐点周りの分枝を含む Liouville 型定理を示し, 線状進行波の漸近安定性を示した.