今後の研究計画

Hessenberg 多様体の幾何，表現論，可積分系

旗多様体の代数的部分集合の中で特に重要なものとして，幾何学的表現論で研究されてきた「Springer 多様体」や，旗多様体の量子コホモロジー環の研究において現れる「Peterson 多様体」,「Weyl chamber の集まりを扇とするトーリック多様体」などがあるが，これらを統一的に記述する空間が Hessenberg 多様体である．A_n 型の場合は $n \times n$ 行列とある条件を満たす関数 $h : [n] \to [n]$ の組から次のように定義される．

$$\mathrm{Hess}(A, h) = \{V_\bullet \in Fl(\mathbb{C}^n) \mid AV_j \subseteq V_{h(j)}\ (j = 1, \ldots, n)\}$$

一般には，G を複素半単純代数群，B をその Borel 部分群とし，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{b}$ をそれぞれの Lie 環とする．このとき，$x \in \mathfrak{g}$ と，B-安定な部分空間 $\mathfrak{b} \subseteq H \subseteq \mathfrak{g}$（Hessenberg 空間と呼ばれる）に対して，

$$\mathrm{Hess}(x, H) = \{gB \in G/B \mid \mathrm{Ad}(g^{-1})x \in H\}$$

として定義される．以下，今後の研究課題を述べる．

- **Hessenberg 多様体の Weyl 指標公式**

（曾昊智氏と藤田直樹氏との共同研究）

旗多様体上のトーラス同変な直線束を半単純な正則 Hessenberg 多様体上に制限すると，その大域切断の成す空間はトーラスの表現となり，その Euler 指標は Weyl の指標公式を自然に一般化したものにより記述される．そこで，大域切断の成す空間そのもの及びこの直線束の高次コホモロジーがいつ消滅するかについて調べている．この研究は半単純な正則 Hessenberg 多様体上に完全可積分系が存在するかどうかという問題への第一歩目のアプローチである．

- **Hessenberg 多様体の族に現れる正則シンプレクティック構造と可積分系**

（Peter Crooks 氏との共同研究）

Hessenberg 空間の特別なものとして，Borel 部分群の Lie 環に負の単純ルートのルート空間を直和して得られる H_0 を考える．この Hessenberg 空間 H_0 から定まる Hessenberg 多様体としては，Peterson 多様体や Weyl chamber の集まりを扇とするトーリック多様体などがある．H_0 から定まる Hessenberg 多様体全体のなす族を $\mathfrak{X}(H_0)$ と書くと，そこには正則なポアソン構造が存在し，稠密なシンプレクティック葉を持つことが分かってきた．さらに，完全可積分系を許容する空間 $G \times S_{\mathrm{reg}}$ がその稠密なシンプレクティック葉として現れる．ここで，S_{reg} は正則 Slodowy スライスである．また，戸田格子がこれらの関係を繋ぐ鍵であることも分かってきた．これらの関係について研究を進めていきたい．