阿部翠空星

＜これまでの研究成果＞

［（１）有限体上の Alexander quandle の 4-cocycle について］曲面絡み目の不変量に quandle shadow cocycle 不変量がある．これを計算するには具体的な quandle 4-cocycle が必要である．有限体上の Alexander quandle X に対して非自明な 4-cocycle を多項式で表示した．さらに，この quandle の $H^2_Q(X;\mathbb{Z}) \cong 0$ のときに $H^4_Q(X;\mathbb{Z})$ を決定した．この研究は野坂武史氏によりさらに発展があった．quandle (shadow) cocycle 不変量の普遍不変量である quandle homotopy 不変量は quandle 分類空間である 3 次の homotopy 群 $\pi_3(BX)$ に値を持つ．有限体上の Alexander quandle の場合 (より一般には regular quandle で十分である．) は普遍係数定理と hurewicz 準同型定理により $H^2_Q(X;\mathbb{Z}) \cong 0 \Rightarrow H^4_Q(X;\mathbb{Z}) \cong \pi_3(BX)$ が導かれた．これにより，曲面絡み目の quandle homotopy 不変量の生成元が決定された．

［（２）Willerton 予想］一般に，正規化した d 次の素な vassiliev 不変量 v_d に対して，結び目 K が n 交点図式をもつとき，$v_d(K)$ の値は n^d のオーダーでおさえられることが知られている．よって，集合 $\left\{ \left(\frac{v_2(K)}{n^2}, \frac{v_3(K)}{n^3} \right) \in \mathbb{R}^2 \middle| K \text{ は } n \text{ 交点図式をもつ} \right\}$ は有界である．いくつかの結び目に対して点をプロットすると fish-like graph が表れる．この図形がトーラス結び目に対してどのような形になるか求めた．さらに，この結び目に対して Willerton 予想を完全に解決した．

［（３）quandle (shadow) cocycle 不変量と有限型不変量の関係］quandle (shadow) cocycle 不変量と量子不変量は集合論的 Yang-Baxter 方程式以外の関係以外はよくわかっていなかった．結び目行列に関してフィルトレーションを入れることにより quandle (shadow) cocycle 不変量からある種の特殊な有限型不変量が導けることを示した．さらに，これを 3 次元多様体に応用して一般の 3 次元多様体に大槻型不変量とは異なる有限型不変量を再定義した．この不変量は具体的なレンズ空間や Brieskorn 多様体に対して計算可能であり空集合でないことが示された．不変量の強さは少なくとも Dijkgraaf-Witten 不変量よりは強力な不変量である．

［（４）ハンドル体結び目の摂動的 $\mathfrak{sl}_2$ 不変量] 既に定義されたハンドル体結び目の量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量から摂動的 $\mathfrak{sl}_2$ 不変量を導いた．量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量は，辺と三価頂点を平行曲線に置き換え，それらの絡み目のジョーンズ多項式の線型和をとり，1 の複素冪根を代入することによる（3 次元多様体の量子 $SU(2)$ 不変量と似た形である）．当初の研究では量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量と同じ強さの不変量が導出されると考えていた．しかし，摂動的 $\mathfrak{sl}_2$ 不変量を求めるために正規化をして，和を制限したことにより量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量より強い不変量が導出された．実際に従来の量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量では区別できなかった補空間が同相であるハンドル体結び目が区別できる．