今後の研究計画

綾野孝則

1. 種数 3 の超楕円曲線のシグマ関数により解が書ける微分方程式

[1] では超楕円曲線の 2 次の対称積上の可換なベクトル場を用いて、$\mathbb{C}^4$ 上の力学系が導出されている。本研究では、種数が 3 の場合に、この力学系の解をシグマ関数を用いて構成し、2 つの保存量も構成した (publication list 1-1)。今後も種数が 3 の場合を検討する。まずこの力学系が、構成した保存量をハミルトニアンとするハミルトン系であること、Liouville 可積分であることを直接確かめる。この力学系は、4 つの座標の 1 つ 1 つの時間発展が 4 つの座標の多項式で表されている力学系であるため具体的な計算が可能である。代数的な計算により 4 つの座標の 3 つを消去することで、1 つの関数に対する偏微分方程式を導出する。これはシグマ関数により解が与えられる偏微分方程式となる。また変数変換により、この力学系から、2 つの未知関数 G_2, G_4、曲線の定義方程式の係数のうちの 2 つ y_{12}, y_{14} を含む偏微分方程式が得られる (publication list 2)。これは、y_{12}, y_{14} を 0 にすると G_2 に関する KdV 方程式になる。G_2 の解は種数 3 の超楕円曲線のシグマ関数を用いて構成でき、y_{12}, y_{14} を 0 に持っていったときの G_2 の極限関数は KdV 方程式の解になる。本研究ではこの極限関数がどのような関数であるか考察する。

2. 任意のリーマン面のシグマ関数の級数展開

リーマンのテータ関数の原点における級数展開の係数はアーベル積分という超越的な操作から定義される周期行列で与えられる。一方、シグマ関数の原点における級数展開の係数は代数曲線の定義方程式の係数の有理数係数の多項式になる。シグマ関数のこの代数的な性質がリーマンのテータ関数との一番の違いであり応用上重要になる。現在、telescopic 曲線、telescopic でないいくつかの空間曲線に対してシグマ関数のこの性質が示されている (論文リスト 1-4, [2, 3, 4])。一方 [5] では、任意のリーマン面に対してまでシグマ関数が一般化されている。また、任意の代数曲線を表現するモデル (三浦標準形) も知られている (前の曲線はこの特殊な場合)。本研究では任意の代数曲線の定義方程式を三浦標準形で表現し、[5] で定義された任意のリーマン面のシグマ関数の級数展開の係数が定義方程式の係数の有理数係数の多項式であることを示す。

3. 任意の体上の超楕円曲線の等分多項式の導出

楕円曲線上の点で m 倍して単位元になる点を m 等分点という。楕円曲線の場合は等分多項式が知られており、この根から全ての m 等分点を求められる。本研究では種数 g の超楕円曲線の代数的ヤコビ多様体 (因子類群) の m 等分点を求める問題を考える。アフィン代数的ヤコビ多様体の元は、g 次のモニック多項式 U と $g-1$ 次の多項式 V の組 (U, V) で表せる (マンフォード表現)。即ち、(U, V) が m 等分点になるような U, V の $2g$ 個の係数を求めればよい。係数体が $\mathbb{C}$ であれば、アーベル・ヤコビ写像により、代数的ヤコビ多様体は解析的ヤコビ多様体 (複素トーラス) と同型になる。[6] では、解析的ヤコビ多様体の元が m 等分点であるための必要十分条件がシグマ関数を用いて与えられ、アーベル関数論を用いて、(U, V) が m 等分点であるための必要十分条件が U, V の $2g$ 個の係数を変数とする連立方程式として与えられている ($\mathbb{C}$ 上の超楕円曲線の等分多項式)。体の標数が 0 であれば、$\mathbb{C}$ の結果を用いて等分多項式を導出できる。さらに [6] では計算機実験の結果などからこの連立方程式の係数が整数であると予想している。本研究ではこの予想を検討する。もし肯定的に解決できれば、この等分多項式の係数を reduction することで、正標数の体上の超楕円曲線の等分多項式が得られないか検討する。もし得られれば、等分多項式を用いて楕円曲線の有理点の個数を数える ℓ 進法を超楕円曲線に一般化する。これは超楕円曲線暗号の安全性を確かめる上で重要になる。

References

[1] V. M. Buchstaber, A.V. Mikhailov. ”Infinite dimensional Lie algebras determined by the space of symmetric squares of hyperelliptic curves”, *Functional Analysis and Its Applications*, Volume 51, Issue 1, pp.2–21, 2017.

[2] J. Komeda, S. Matsutani, E. Previato, ”The sigma function for Weierstrass semigroups ⟨3,7,8⟩ and ⟨6,13,14,15,16⟩”, *International Journal of Mathematics*, Volume 24, Issue 11, 1350085 (58 pages), 2013.

[3] S. Matsutani, J. Komeda, ”Sigma Functions for a Space Curve of Type (3,4,5)”, *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*, Volume 30, pp.75–91, 2013.

[4] J. Komeda, S. Matsutani, E. Previato, ”The sigma function for trigonal cyclic curves”, arXiv:1712.00694, 2017.

[5] A. Nakayashiki, ”Tau Function Approach to Theta Functions”, *International Mathematics Research Notices*, Volume 2016, Issue 17, pp.5202–5248, 2015.

[6] Y. Uchida, ”Division polynomials and canonical local heights on hyperelliptic Jacobians”, *Manuscripta Mathematica*, Volume 134, Issue 3–4, pp.273–308, 2011.