これまでの研究成果

綾野孝則

1. telescopic 曲線のシグマ関数

楕円シグマ関数は次の重要な性質を持っている。1. 任意の楕円関数はシグマ関数の対数微分で定義される $\wp$ 関数とその微分 $\wp'$ の有理関数で表せる。2. $\wp$ と $\wp'$ により Weierstrass の標準形で表された楕円曲線上の点をパラメトライズできる。Klein は超楕円曲線に対してこの 2 つの性質の類似を満たす多変数シグマ関数を導入した。さらに Baker は種数が 2,3 の超楕円曲線に対して、シグマ関数の高階の対数微分を 2,3 階の対数微分で表わす公式を得た。これらの関係式は KdV 方程式や KP 方程式などの数理物理の重要な微分方程式になっている。即ち、それらの解がシグマ関数で書ける。近年、Buchstaber, Enolski, Leykin により、超楕円曲線を含む (n,s) 曲線と呼ばれる代数曲線にまでシグマ関数は一般化された [1]。さらに [5] で、(n,s) 曲線のシグマ関数の原点における級数展開の係数が定義方程式の係数の有理数係数の多項式になるという性質が示されている。この性質がシグマ関数とテータ関数の一番の違いであり応用上重要になる。例えば代数曲線を用いて可積分系を構成し、その解がシグマ関数で書けたならば、代数曲線の定義方程式の係数を 0 に持っていき曲線を退化させたとき、解がどのような関数に退化していくかということもよく分かる。本研究では、(n,s) 曲線より一般の telescopic 曲線 [4] にまでシグマ関数を一般化し、そのシグマ関数も同様の級数展開の性質を満たすことを示した (論文リスト 1-3,4)。また [6] の結果を一般化して、telescopic 曲線のシグマ関数の加法公式を導出した (中屋敷氏との共同研究、論文リスト 1-4)。

2. ヤコビの逆公式の telescopic 曲線への一般化

アーベル・ヤコビ写像により代数曲線のヤコビ多様体上の有理型関数 (アーベル関数) 体 (解析的な世界) と代数曲線上の有理関数体 (代数的な世界) は同型になる。代数曲線を用いて可積分系を作る方法として、(具体的に計算のできる) 代数曲線上の有理関数の間の関係式を導き、それを上の同型で移してアーベル関数の間の関係式を導く (この関係式がアーベル関数で解が書ける微分方程式になっている) という方法がある。このとき重要になるのは、代数曲線上の基本的な有理関数が上の同型によってどのようなアーベル関数に対応するかを具体的に記述することである。超楕円曲線の場合は点の座標の基本対称式で表される有理関数がシグマ関数の対数微分で定義される超楕円関数に対応することが示され、代数的な世界と解析的な世界との対応がよく分かっている (ヤコビの逆公式)。[3] では (n,s) 曲線の特別な場合である $y^r = f(x)$ で定義される曲線に対してヤコビの逆公式の自然な一般化が与えられている。本研究では telescopic 曲線に対してヤコビの逆公式を一般化した (論文リスト 1-2)。即ち、telescopic 曲線に対して、シグマ関数の対数微分で定義されるアーベル関数 ($\wp$ 関数の一般化) がどのような有理関数に対応するかを具体的に記述した。

3. シグマ関数により解が与えられる力学系

ある空間に対してその上に定義される関数全体の構造を調べることはその空間を理解する上で重要である。種数 g の超楕円曲線のヤコビ多様体上の有理型関数体は超楕円関数により $\mathbb{C}$ 上生成され、その生成元の間の関係式も分かっている。ヤコビ多様体の元でシグマ関数の値が 0 になるもの全体をシグマ因子という。本研究では種数 3 の超楕円曲線のシグマ因子上の有理型関数体の生成元をシグマ関数で構成し、その生成元の間の関係式も完全に決定した。さらにその応用として [2] で導入された力学系の解をその生成元を用いて構成した (Buchstaber 氏との共同研究、論文リスト 1-1)。

References

[1] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolski, D. V. Leykin, "Multi-Dimensional Sigma-Functions", arXiv:1208.0990.

[2] V. M. Buchstaber, A.V. Mikhailov. "Infinite dimensional Lie algebras determined by the space of symmetric squares of hyperelliptic curves", *Functional Analysis and Its Applications*, Volume 51, Issue 1, pp.2–21, 2017.

[3] S. Matsutani, E. Previato, "Jacobi inversion on strata of the Jacobian of the C_{rs} curve $y^r = f(x)$", *Journal of the Mathematical Society of Japan*, Volume 60, Number 4, pp.1009–1044, 2008.

[4] S. Miura, "Linear Codes on Affine Algebraic Curves", *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol.J81-A, No.10, pp.1398–1421, 1998.

[5] A. Nakayashiki, "On Algebraic Expressions of Sigma Functions for (n,s) Curves", *Asian Journal of Mathematics*, Volume 14, Number 2, pp.175–212, 2010.

[6] A. Nakayashiki, K. Yori, "Derivatives of Schur, Tau and Sigma Functions on Abel-Jacobi Images", *Symmetries, Integrable Systems and Representations*, Springer, pp.429–462, 2012.