今後の研究計画

濵田法行

私の目下の研究における方向性は非常にシンプルである. すなわち, これまで培ってきたテクニック・ノウハウを活かして, 様々なレフシェッツ・ペンシル, ファイブレーション, シンプレクティック4次元多様体を構成することである. これらの構成を通してシンプレクティック4次元多様体を理解したい.

こういった動機に従い, 今現在いくつかの研究プロジェクトをかかえている. これらはどれもすでに基本的な結果を得ているものばかりであり, 研究成果として公表できることを相当程度期待できる. 私はしばらくの間, 具体的には1年程度, これらの研究に集中したいと考えている.

1. 種数2最小レフシェッツ・ペンシル, シンプレクティック・カラビ-ヤウ4次元多様体の構成. これはR. Inanc Baykur氏とMustafa Korkmaz氏との共同研究である. すでに種数2最小レフシェッツ・ペンシル, 種数3最小超楕円レフシェッツ・ペンシルとその高種数化などを構成している. さらに, これらを応用することでシンプレクティック・カラビ-ヤウ4次元多様体上のレフシェッツ・ペンシルを大量に構成できる. この中に新しい例があることを期待している.

2. レフシェッツ・ペンシルを用いたエキゾチック有理曲面の構成. これはR. Inanc Baykur氏との別の共同研究である. 種数2最小レフシェッツ・ペンシルを巧みに組み合わせることで, エキゾチック有理曲面上の種数5レフシェッツ・ペンシルを構成することができた. 我々は同様のテクニックを用いてさらに小さいエキゾチック有理曲面を探している.

3. 複素射影平面$\mathbb{CP}^2$上のレフシェッツ・ペンシルの網羅的な構成. 複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ はシンプレクティック4次元多様体の初等的な例である. 早野氏との共同研究で4次元トーラス上にレフシェッツ・ペンシルを体系的に構成したように, 私は $\mathbb{CP}^2$ 上のレフシェッツ・ペンシルを構成している. 実際, すでに全ての可能性のうちの“三分の二”は発見している.

4. Gurtasのレフシェッツ束のペンシル構造の研究. これは門田直之氏との共同研究である (-1)-切断に関して調べるべき重要なレフシェッツ束がいくつかある. 特に, Gurtasの例や奥田-高村の例は興味深い. これらの切断の構成についてはある程度見当がついている.

5. レフシェッツ・ペンシルとその非分岐有限被覆. レフシェッツ・ペンシルの非分岐有限被覆をとると新しいレフシェッツ・ペンシルができる. 私はMatsumoto-Cadavid-Korkmazレフシェッツ・ペンシルとその被覆について興味深い関係を見つけている.

将来的展望. これまで培ってきたレフシェッツ・ペンシルの構成テクニックに加え, 現在取り組んでいるプロジェクトからもさらに新しい知見が得られると確信している. さらなる技術を身に着ければ, より野心的な問題にも取り組みたい. そのような問題の一つとして, Bogomolov-Miyaoka-Yau不等式を破るシンプレクティック4次元多様体が存在するかというものがある. この不等式は複素曲面の大部分, すなわち一般型曲面について成立する. 従って, この問題は複素曲面とシンプレクティック4次元多様体の差異を問うものである. 提出されて数十年経つがこの問題はいまだ未解決である. 将来的なプロジェクトとして, レフシェッツ・ペンシルを具体的に構成することでそのようなものが存在することを示すことに取り組みたい.