(2) これまでの研究成果のまとめ　　真瀬 真樹子

3 次元ファノ多様体の超曲面として得られる $K3$ 曲面の族 (単に $K3$ 曲面族 と呼ぶ) のピカール格子とは, 族の十分一般元の極小モデルである $K3$ 曲面のピカール格子として定義する. 反射的 3 次元多面体から構成される 3 次元トーリック多様体は 3 次元ファノ多様体である.

(a) $K3$ 曲面族の双有理同値

$K3$ 曲面族が同型なピカール格子を持つときに族の一般元が双有理同値かどうかという問題をファノ多様体である重み付き射影空間の中の $K3$ 曲面族 [小林-真瀬, 2012] , ある非特異 3 次元ファノ多様体の $K3$ 曲面族 [真瀬, 2012] [真瀬, 2014] に対して研究した.

(b) 特異点の双対と $K3$ 曲面

[Arnold] によって分類された空間内のある超曲面孤立特異点に対して “転置双対性” があることを [Ebeling-高橋][Ebeling-Ploog] は示した.

定理 (転置双対ペアに関する研究結果のまとめ) [真瀬-植田, 2015, 真瀬, 2016–17]

(1) 全ての転置双対ペアに対し, 互いに極双対な 反射的 3 次元多面体 Δ, Δ' と特異点の定義式 f, f' の変形 F, F' が存在して, 多項式 F (resp. F') のニュートン多面体は Δ (resp. Δ') の部分多面体である.

(2) 表 **??** に掲載された転置双対ペアに対して, Δ に対応する射影多様体と族の十分一般の元の $(1,1)$ ホッジ成分の間の自然な制限写像が全射である.

更に, 多面体 Δ と Δ' に付随する $K3$ 曲面族のピカール格子 $\mathrm{Pic}_\Delta, \mathrm{Pic}_{\Delta'}$ は表 **??** の通り与えられて, 格子 Pic_Δ と $U \oplus \mathrm{Pic}_{\Delta'}$ は $K3$ 格子 $\Lambda_{K3} := U^3 \oplus E_8^2$ の中で直交補空間である. 以下, 特異点の名称は [Arnold] に依り, 格子の名称は [Bourbaki] に倣う. 階数を $\rho_\Delta := \mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}_\Delta$ とする. 格子 K のディスクリミナントを $\mathrm{discr}\,K$ と記す. 特に K_1, K_2 は負定値の偶格子であり, 不変量は次の通りである: $\mathrm{rk}\,K_1 = 15, \mathrm{discr}\,K_1 = -18$, $\mathrm{rk}\,K_2 = 16, \mathrm{discr}\,K_2 = 4$.

B	Pic_Δ	ρ_Δ	$\lvert\mathrm{discr}\rvert$	$\rho_{\Delta'}$	$\mathrm{Pic}_{\Delta'}$	B'
Q_{12}	$U \oplus E_6 \oplus E_8$	16	3	4	$U \oplus A_2$	E_{18}
$Z_{1,0}$	$U \oplus E_7 \oplus E_8$	17	2	3	$U \oplus A_1$	E_{19}
E_{20}	$U \oplus E_8^{\oplus 2}$	18	1	2	U	E_{20}
$Q_{2,0}$	$U \oplus A_6 \oplus E_8$	16	7	4	$U \oplus \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	Z_{17}
E_{25}	$U \oplus E_7 \oplus E_8$	17	2	3	$U \oplus A_1$	Z_{19}
Q_{18}	$U \oplus E_6 \oplus E_8$	16	3	4	$U \oplus A_2$	E_{30}
$Z_{1,0}$	$U \oplus D_5 \oplus E_7$	14	8	6	$U \oplus A_1 \oplus A_3$	$Z_{1,0}$
$U_{1,0}$	$U \oplus K_1$	17	18	3	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \oplus A_1$	$U_{1,0}$
Q_{17}	$U \oplus E_6 \oplus E_7$	15	6	5	$U \oplus A_1 \oplus A_2$	$Z_{2,0}$
$W_{1,0}$	$U \oplus K_2$	18	4	2	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$W_{1,0}$

表 1: 格子の双対であるような $K3$ 曲面族のピカール格子

(c) 超越格子が $(2) \oplus (6)$ のヤコビ楕円的特異 $K3$ 曲面の特異ファイバーの分類

このような特異ファイバーの分類は, 階数 24 のニーマイヤー格子の中の自明格子 $M = A_1 \oplus A_5$ の原始的埋め込みの分類と同値である. この事実を用いて分類を行った. [BERTIN, GARBAGNATI, HORTSCH, LECACHEUX, MASE, SALGADO, and WHITCHER, 2015]