今後の研究計画

嶺山 良介

ヒルベルト幾何： ヒルベルト距離を備えた有界凸領域（ヒルベルト幾何）上の粗幾何学の課題は次である．尾國氏との共同研究で二次元の場合には任意のヒルベルト幾何に対して漸近次元が 2 であることを証明し，その系として粗 Novikov 予想よりも強いことを主張する粗 Baum・Connes 予想が正しいことも示した．この結果はより一般に n 次元領域に対して漸近次元 n であることが成り立つと期待される．一般のヒルベルト幾何についても漸近次元の下からの評価は共同研究によりすでに得られているので，上からの評価が問題である．ここで注目しているのはヒルベルト幾何がグロモフ双曲的であるための特徴づけである．Karlsson・Noskov によれば領域のユークリッド空間の意味での境界がもし微分不可能な点を含めば，その点に近づくにつれてその領域上のヒルベルト幾何はユークリッド空間に近づいていく．この構造を利用してヒルベルト幾何の良い空間への擬等長埋め込みを実現することにより漸近次元を評価する．

タイヒミュラー空間： タイヒミュラー空間を粗幾何学的観点から捉え直すことに取り組んでいる．粗幾何学的考察では，タイヒミュラー空間の（相対的）双曲性により無限遠境界の考察が重要である．具体的には距離空間の内在的情報から定まる無限遠境界で，粗幾何学的な性質もよく反映するもの（コロナ）の存在を示したい．そのため，タイヒミュラー空間の $\mathbb{C}^n$ 上擬凸集合への等長埋め込みがあるという事実から，さらに強くヒルベルト幾何を備えた領域への擬等長同型を探すことを考える．これが見つかれば，尾國氏との共同研究で得られたヒルベルト幾何の粗幾何学の知見を用いることができる．さらに，タイヒミュラー空間の境界として良く知られたサーストン境界がコロナであることも従うと予想される．このアプローチは Papadopoulos による「タイヒミュラー空間を有界凸領域として実現し，その上のヒルベルト幾何を調べよ」という問題とも関連しており，ヒルベルト幾何としてのタイヒミュラー空間の振る舞いを調べること自身，興味深い．

自由群の外部自己同型群： 通約性の研究の今後の展望を述べる．現在，通約類全体の振る舞いを調べることによって，fully irreducilbe な元の力学系的性質がわかるのではないかと考えている．実際，fully irreducible な元に対応して現れる Culler・Vogtmann の outer space の境界の点が非常に重要である．そこで空間を「並べて」収束の様子を見るということを考える．これには，Sullivan によって定義された solenoid の Teichmüller 空間のアナロジーが有用であろうと予想している．この空間には底曲面の基本群の有限指数部分群の間の同型のなす群（曲面群の通約群）が作用する．また，solenoid を研究する動機の一つとして，Ehrenpreis 予想「二つの閉曲面に対してそれぞれの有限被覆で Teichmüller 距離に関して任意に近いものが存在する」との関連がある．Sullivan はこの主張が solenoid の言葉で次のように書き直すことができることを示した：コンパクトな solenoid の Teichmüller 空間への曲面群の通約群の作用が稠密な軌道をもつ．応募者は同様のアプローチがグラフに関する Ehrenpreis 予想にも可能であるのではないかと考えている．ここでグラフに関する Ehrenpreis 予想は次のように定式化される：二つのグラフに対してそれぞれの有限被覆で Thurston 距離（その対称化）に関して任意に近いものが存在する．