今後の研究計画

大田武志

2009 年の Alday-Gaiotto-Tachikawa の仕事により, 2 次元共形場理論と 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の間の対応が, 新たな注目を集めています. 2 次元理論の相関関数 (共形ブロック) は, ゲージ理論のインスタントン分配関数と同一視できることが示されたのです.

この「2 次元/4 次元対応」は, いろいろな一般化がなされてきました. その一つとして, 「q-変形」された 2 次元共形場理論と, 4 次元から 5 次元へ「q-もちあげ」された超対称ゲージ理論の間の対応が提唱されています. q 変形された 2 次元の理論は, q-Virasoro 代数や q-W 代数などの対称性を持ち, もともとの理論の持っていた対称性が q-変形されています. 一方, q-もちあげされた 5 次元ゲージ理論では, 第 5 次元方向が S^1 にコンパクト化されていて, コンパクト化の半径が $\log q$ に比例しています.

われわれは, 2 次元側での q のベキ根極限を調べ, q-Virasoro 代数や, q-W 代数から, パラフェルミオン代数が得られることを示しました. 引き続き, この極限を詳しく研究し, 「2 次元/4 次元対応」のさまざまな性質を解明することを目指します. とくに, A 型以外の ALE 空間上のゲージ理論やクイバー型のゲージ理論の場合に, どのように拡張がなされるかということも, とりあげてみたい研究テーマのひとつです. クイバー型ゲージ理論に付随した「ヤンギアン代数」というものが提唱されています. Schur-Weyl 対応において, ヤンギアン代数はヘッケ代数と関連しているので, こういった方向への拡張をこころみることは, ゲージ理論/共形場理論/行列模型対応についての理解をより深めてくれるでしょう.

また, q-Virasoro 代数や q-W 代数は, Ding-Iohara-Miki 代数とよばれるある Hopf 代数で, ある特別な構造関数を持つものに関係していることが知られています. この代数はさらなるパラメータ p を導入して, 構造関数を変更することにより楕円型の Ding-Iohara-Miki 代数と呼ばれるものに拡張できます. この楕円 Ding-Iohara-Miki 代数と関連する「楕円 Virasoro 代数」や「楕円 W 代数」の対称性をもつ相関関数やそれに対応した行列模型は, 6 次元 $\mathcal{N}=(2,0)$ 超共形場理論の分配関数と関連すると予想するのは自然だと思われます. これらの対応を詳しく調べることを目指します. さらにその対応が成り立つとすると, 楕円代数のパラメータのベキ根極限を考え, 対応する 5 次元や 4 次元理論がどのようなものか明らかにすることも試みます.

そのほかに, 関連した楕円代数として, $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ というものもあります. これは, 面型の楕円代数の一種で, ダイナミカル Yang-Baxter 方程式の楕円解に基づいて構成された代数です. これもまた Hopf 代数構造を持ちます. この楕円代数が, 5 次元ゲージ理論の「ダイナミカルな対称性」の役割を果たしているのではないかというのが, われわれの期待するところです. 最近, われわれは, $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}(2))$ 場合に, そのレベル-1 加群と, 5 次元 $SU(2)$ ゲージ理論の対応を考察しました. この結果の, より一般の楕円代数 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の場合への拡張も目指していきたい.