今後の研究計画

鈴木　新太郎

ランダム β-変換に対する線形応答公式

$\beta > 1$ を非整数, $p \in (0,1)$ とする．これまでの研究で述べたように, ランダム β-変換 K_β は, 直積空間 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times [0,[\beta]/(\beta-1)]$ 上で定義され, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上の $(1-p,p)$-Bernoulli 測度 m_p と区間 $[0,[\beta]/(\beta-1)]$ 上の正規化された Lebesgue 測度 λ_β による直積測度 $m_p \otimes \lambda_\beta$ に関して絶対連続な不変確率測度 $\hat{\mu}_{\beta,p}$ をただ 1 つ有し, それは直積測度 $\hat{\mu}_{\beta,p} = m_p \otimes \mu_{\beta,p}$ であらわされる．これまでの研究成果により, 確率測度 $\mu_{\beta,p}$ の密度関数と可測力学系 $(K_\beta, \hat{\mu}_{\beta,p})$ に対する測度論的エントロピー $h_{\hat{\mu}_{\beta,p}}(K_\beta)$ の明示公式が得られているが, 本研究ではそれらの結果を応用し, (β,p) に関するエントロピー $h_{\hat{\mu}_{\beta,p}}(K_\beta)$ の挙動について考察する．具体的には, 関数 $p \mapsto h_{\hat{\mu}_{\beta,p}}(K_\beta)$ が実解析的となることに着目し, その関数の最大最小値問題を論じること, および最大値もしくは最小値をとる点のパラメータ β に関する依存性を考察する．パラメータ p に関するエントロピー $h_{\hat{\mu}_{\beta,p}}(K_\beta)$ の挙動を考察する際の 1 つの手段として, 関数 $p \mapsto f_{\beta,p}$ の N 回微分 $\dfrac{\partial^N f_{\beta,p}}{\partial^N p}$ を計算し, それをパラメータ p に関するエントロピー $h_{\hat{\mu}_{\beta,p}}(K_\beta)$ の最大最小値問題に適用するということが考えられる．この微分の明示式は線形応答公式とよばれているが, $p \mapsto f_{\beta,p}$ の線形応答公式を, エントロピーの明示公式と結びつけ, エントロピーの挙動を解析することを目標とする．またパラメータ β に関するエントロピーの連続性や解析性に関し, 関数 $\beta \mapsto f_{\beta,p}$ に関する線形応答公式が得られるかどうかを検証する．

Bernoulli convolution と β-展開に関する研究

$1 < \beta \leqq 2$, $0 < p < 1$ とする．m_p で $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上の $(p,1-p)$-Bernoulli 測度をあらわすとする．関数 $g_\beta : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ を, β-展開との関連から, $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ に対し

$$g_\beta((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\beta^n}$$

で定める．パラメータ (β,p) に関する Bernoulli convolution $\nu_{\beta,p}$ を確率測度 m_p に関する関数 g_β の分布 $\nu_{\beta,p} = m_p \circ g_\beta^{-1}$ で定義する．Bernoulli convolution $\nu_{\beta,p}$ は $[0,[\beta]/(\beta-1)]$ をサポートにもつ実数上の自己相似測度であり, 各パラメータ (β,p) ごとに $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度に関し絶対連続もしくは特異のいずれかとなる．$\beta = 2$ の場合, Bernoulli convolution $\nu_{\beta,p}$ の分布関数は p をパラメータとする Lebesgue の特異関数であり, $x \in [0,1]$ におけるその値は, x の 2 進小数表示から得られることが知られている．本研究では, $\beta = 2$ の場合と同様の類推で, 実数の β-展開と Bernoulli convolution を考察し, β の代数的性質と Bernoulli convolution の性質との関連付けを目指す．Bernoulli convolution の分布関数は, p をパラメータとする Lebesgue の特異関数と類似の関数方程式をみたしており, その方程式から得られている Lebesgue の特異関数に関する結果を Bernoulli convolution の分布関数の場合に拡張することを試みる．