2018 年 2 月 12 日

現在までの研究の概要

田　原　伸　彦

Painlevé 方程式とは，20 世紀初頭 Painlevé とその弟子が代数的常微分方程式で定義される新たな特殊関数の発見を目的とする動く分岐点をもたない 2 階の方程式の研究から得た，解が既知関数に帰着されない 6 個の常微分方程式のことである．さらに 2 階 Fuchs 型微分方程式のモノドロミー保存変形との関係をもち，2 次元 Ising 模型の研究にも出現するなど，様々な方面とのつながりをもつ興味深い研究対称である．

Painlevé 方程式の解曲線全体を捉えた幾何的対象として，岡本和夫氏の構成した初期値空間がある．これは Painlevé 方程式と等価な Hamilton 系の相空間をコンパクト化し，系の特異点を数回 blow-up して得られたコンパクトな多様体から解の到達し得ないある部分集合を取り除いて構成される，ある意味で Painlevé 方程式を特徴付ける空間である．岡本氏は更に，第 1 を除く Painlevé 方程式には Bäcklund 変換と呼ばれる従属変数の有理的変換が存在し，この変換の作る群はある affine Weyl 群のパラメータ空間への作用と解釈できる事を示した．また野海・山田両氏は，一般の affine root 系に対してもその表現としての affine Weyl 群を Bäcklund 変換としてもつ非線形微分方程式が構成可能か，という問題意識から，任意の $\ell = 2, 3, \ldots$ に対して $A_\ell^{(1)}$ 型 affine Weyl 群対称性をもつ方程式の系列を見出した．この系列は，Painlevé 方程式の高階化と呼ぶべきものを定めている．

私はこのような「微分方程式が定める多様体」という概念や Painlevé 方程式がある意味自然に示す対称性に興味をもち，またそれらをなるべく統一して理解したいと思い，Painlevé 方程式の有理型解を形式的 Laurent 展開の形で構成するという Painlevé 自身が第 1 Painlevé 方程式に用いた手法を実質 4 階の常微分方程式を定める $A_4^{(1)}$ 型方程式系に対して用いることで，この系の形式的有理型解を全て求め，それらを parametrize できる拡張相空間を構成した．Painlevé 系の場合は相空間は 2 次元であるが，$A_4^{(1)}$ 型方程式系と等価な Hamilton 系の相空間は 4 次元であり，そのコンパクト化の仕方や blow-up の計算過程ははるかに複雑かつ実行困難になるので，上記の方法が有効であった．

以　　上