これまでの研究成果のまとめ

滝岡 英雄

互いに素な整数 $p(>0), q$ に対して、結び目 K の管状近傍にのり、K のロンジチュード方向に p 回、メリディアン方向に q 回まわる結び目を K の (p,q) ケーブル結び目 $K^{(p,q)}$ とよぶ。結び目不変量 I に対して、K を $I(K^{(p,q)})$ にうつす写像は結び目不変量であり、I の (p,q) ケーブル化とよばれている。ケーブル化は、もとの不変量より多くの情報を含むと考えられている。私は、HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の共通の 0 番係数多項式である Γ 多項式に着目し、そのケーブル化を研究している。これまでに次のような結果を得た。

- **Kanenobu 結び目のブレイド指数**

任意の結び目は閉ブレイドで表せる。そのブレイドの紐の最小本数をその結び目のブレイド指数と呼ぶ。ブレイド指数は HOMFLYPT 多項式の v 次数の幅による MFW 不等式により下から評価できる。しかし、Kanenobu 結び目の無限族 $k(n)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ の HOMFLYPT 多項式はすべて一致するので、それらのブレイド指数 $\beta(k(n))$ を決定することは容易ではない。本研究では、Γ 多項式の $(2,q)$ ケーブル化により、$\beta(k(n))$ の下からの評価が n に関して増大するという精密な評価を与えた [7,8,9,12]。

- **Kanenobu 結び目のアーク指数** (Hwa Jeong Lee 氏 (KAIST) との共同研究)

任意の結び目は各ページと適切に埋め込まれた 1 つの単純弧で交わる本の中に埋め込める。そのページの最小枚数をその結び目のアーク指数と呼ぶ。アーク指数は Kauffman 多項式の a 次数の幅による MB 不等式により下から評価できる。しかし、Kanenobu 結び目の無限族 $k(n)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ の Kauffman 多項式の a 次数の幅はすべて一致するので、それらのアーク指数 $\alpha(k(n))$ を決定することは容易ではない。そこで、ブレイド指数の場合と同様に Γ 多項式の $(2,q)$ ケーブル化を応用するために、一般のケーブル結び目に対して、そのアーク指数のより良い評価を与えるアルゴリズムを構成した [5]。結果として、$\alpha(k(n))$ の下からの評価が n に関して増大するという精密な評価を与えた [4]。

- **ミュータント結び目の Γ 多項式のケーブル化**

ある結び目にミューテーションという操作を施して新たな結び目が得られることがある。もとの結び目とそのミューテーションによって得られた結び目は性質が非常に似ており、多くの不変量が一致することが知られている。例えば、HOMFLYPT 多項式、Kauffman 多項式、それらの $(2,q)$ ケーブル化は、ミューテーションに関して不変である。また、HOMFLYPT 多項式の $(3,q)$ ケーブル化により、区別できるそれらの組が存在する。それ故、HOMFLYPT 多項式の一部である Γ 多項式の $(3,q)$ ケーブル化にも区別できる可能性があるのだが、本研究では Γ 多項式の $(3,q)$ ケーブル化は、ミューテーションに関して不変であることを示した [6,11]。(最近、伊藤哲也氏により Γ 多項式のケーブル化ではミュータント結び目を区別できないことが示された。)

- **クラスプ数が高々 2 の結び目の Γ 多項式の特徴付け**

任意の結び目は特異点集合の連結成分が有限個のクラスプ弧からなる特異円板（クラスプ円板）を張る。そのクラスプ円板のクラスプ弧の最小数をその結び目のクラスプ数と呼ぶ。先行研究として、クラスプ数が高々 2 の結び目の Conway 多項式は特徴付けられている。本研究では、クラスプ数が高々 2 の結び目の Γ 多項式を特徴付けた [3,10]。

- **Γ 多項式の $(2,1)$ ケーブル化に関する研究**

Γ 多項式は多項式時間で計算できることが知られているので、そのケーブル化も多項式時間で計算できる。本研究では、10 交点までの結び目（向きは考えない）に対しては Γ 多項式の $(2,1)$ ケーブル化だけで完全分類できることを示した [1]。また、自明な Γ 多項式の $(2,1)$ ケーブル化をもつ結び目の無限族を構成した。さらに、その無限族は自明な Γ 多項式、自明な 1 番係数 HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式をもつことを示した [2]。