(2) これまでの研究成果のまとめ

ハミルトン形式の解析力学や一般相対論をあつかうとき，過剰決定系の偏微分方程式に遭遇することがある．例えば，時空の計量を特徴付けている対称性は何かという問から，キリング方程式と呼ばれる偏微分方程式が現れるが，これは過剰決定系の典型である．こうした過剰決定系のなかでも，有限型とよばれるものは， 解空間の有限次元性が保証されるなど，偏微分方程式でありながら常微分方程式に近い性質をもつ．

私は，有限型の過剰決定系として，キリングテンソルが従うキリング方程式に興味を持ち，研究を進めてきた．特に，以下の問に取り組んできた：

- ∘ 与えられた計量に対して，キリング方程式の解は存在するか？
- ∘ 存在するならば，解空間の次元はいくつか？
- ∘ 解空間の次元を決める幾何学量を同定できるか？

問に部分的に回答する，以下の成果を得ている：

- **キリング方程式の延長**
  新たな変数を導入して，与えられた偏微分方程式を閉じた方程式に書き換える操作を「延長」という．有限型の過剰決定系は，延長操作によって方程式の可積分条件，解空間の最大次元などが明らかになる．私は，ヤング対称子という射影演算子をテンソル解析に応用することで，キリング方程式の延長操作を具体的かつ簡便に実行する方法を構築した [4].

- **キリングテンソルの可積分条件**
  具体的な延長操作を通じて，4 階までのキリング方程式の可積分条件を簡潔に書き下した ([4] と学位論文). こうした可積分条件は，多様体のリーマンテンソルやその微分に強い拘束条件を与える．その表式は，ヤング対称子によって簡潔に与えられる．

- **キリングベクトルの存在を妨げる曲率障害**
  リーマンテンソルやその微分から作られるスカラー量によって，キリングベクトルの本数を判定するという試みは古くから知られている．特に，2 次元の場合は，J. G. Darboux がこの問を完全に解いている．しかしながら，3 次元以上の場合は，前述のスカラー量のみでキリングベクトルの本数を判定することはできない．Vanishing scalar invariant spacetimes と呼ばれる多様体が典型例である．私は，キリングベクトルの可積分条件を解析することによって得られる幾何学量（曲率障害）を用いて，キリングベクトルの本数を判定する枠組みを構築している（3 次元の場合，学位論文）. こうした曲率障害は，前述のスカラー量だけでなく，例えば，リッチテンソルの固有システムが描く積分曲線の測地曲率・法曲率・相対捩率などを含む．

- **キリングテンソルの一般化**
  キリングテンソルは測地流の速度ベクトルに関する多項式型保存量を与える．これに類似して，測地流が速度ベクトルに関する有理関数型保存量を持つとき，キリングテンソルの概念を拡張することができる．文献 [3] では，有理関数型保存量に付随したキリングテンソルの一般化を定義し，こうした保存量を有する力学系について考察した．