研究成果

塚本真由 (tsukamoto@sci.osaka-cu.ac.jp)

1. q-Schur 代数の Hochschild コホモロジー.

q-Schur 代数は一般線形群のモジュラー表現を研究するために, Dipper–James によって導入された. 体上の q-Schur 代数は準遺伝代数の構造を持つことが知られており, この性質は本研究において重要な役割を果たす. 代数の Hochschild コホモロジーは, 表現論や代数幾何といった様々な分野に現れる. Hochschild コホモロジーの重要な性質として, Hochschild コホモロジー環は導来同値の下で不変であることが知られている.

本研究では Hochschild コホモロジーを計算するために, 次のことを証明した. まず, q-Schur 代数の任意のブロック代数と "特別な" ブロック代数の間の導来同値を先行研究を組み合わせることにより構成した. Hochschild コホモロジー環は導来同値の下で不変な量であるから, 本研究ではこの "特別な" ブロック代数の Hochschild コホモロジーを計算すれば良いことが従う. 更にこの "特別" なブロック代数はクイバーと関係式の形で与えられているので, 直接計算により Hochschild コホモロジーを計算することができる. 次に q-Schur 代数の準遺伝代数の構造を用いて, Hochschild コホモロジー環の構造を部分的に解決した.

2. 強準遺伝代数の特徴付け.

Iyama の表現次元の有限性定理の証明中に現れる準遺伝代数を契機とし, 片側強準遺伝 (right-strongly/left-strongly quasi-hereditary) 代数が Ringel によって準遺伝代数の特別なクラスとして導入された. この代数は一般の準遺伝代数より良いホモロジー代数的性質を持つことが知られている. 実際に, 片側強準遺伝代数の大域次元の上限は一般の準遺伝代数のものより厳しく与えることができる.

本研究では, 片側強遺伝鎖 (right-strongly heredity chain), 片側削除鎖 (total right rejective chain) と反射鎖 (coreflective chain) を用いて片側強準遺伝代数の特徴付けを与えた. 更に, 片側強準遺伝代数の特別なクラスである強準遺伝代数にも削除鎖による特徴付けを与えた. これらの特徴付けの強みの一つは, 準遺伝代数の構造なしに直接的に片側強準遺伝代数の構造を与えることができる点である. 例えば, 局所遺伝代数や遺伝イデアルを持つ中山代数が片側強準遺伝代数となることが本結果から従う. またこれらの特徴付けの応用として, 大域次元が 2 以下のアルチン代数は必ず片側強準遺伝代数の構造を持つことを証明した. この結果は Dlab–Ringel による, 大域次元が 2 以下のアルチン代数は準遺伝代数となるという定理の精密化である.

3. 強準遺伝的 Auslander 代数の特徴付け.

Auslander 代数の大域次元は 2 以下なので, 研究 2 の応用から必ず片側強準遺伝代数の構造を持つことが従う. しかしながら, 強準遺伝代数になるとは限らない (強準遺伝代数ならば, その大域次元は 2 以下となることは知られている). 本研究では, 有限表現型アルチン代数の有限生成加群のなす圏が削除鎖を持つことの特徴付けを与えることにより, Auslander 代数が強準遺伝代数の構造を持つことの特徴付けを次で与えた.

A を有限表現型アルチン代数, B を A の Auslander 代数とする. このとき, B が強準遺伝代数であることと, A が中山代数であることは同値である.

4. 半局所加群の Auslander–Dlab–Ringel (ADR) 代数の研究.

A をアルチン代数とし, m を A の根基 J に対し, $J^m = 0$ となる最小の自然数とする. Auslander は自己準同型代数 $B := \mathrm{End}_A(\bigoplus_{j=1}^m A/J^j)$ を研究し, B の大域次元が有限となることを示した. 更に Dlab–Ringel によって大域次元の有限性より強く B が準遺伝代数となることが示されたので, この自己準同型代数は Auslander–Dlab–Ringel (ADR) 代数と呼ばれる. また最近 Conde によって B が片側強準遺伝代数となることが証明された.

本研究では, Lin–Xi によって導入された半局所加群の ADR 代数に片側強準遺伝代数の構造を与えた. 任意のアルチン代数は半局所加群なので, 半局所加群の ADR 代数はアルチン代数の ADR 代数の一般化である. またこの結果の応用として, ADR 代数の大域次元の上限を厳しく与えた.