今後の研究計画

今後の具体的な研究テーマを３つ挙げます.

[1] １つの大きな柱はラグランジュ平均曲率流の研究です．この研究の最も大きな目標は，ラグランジュ部分多様体に安定性の概念を代数的に定義し，手術付きラグランジュ平均曲率流という概念も厳密に定義し,「初期条件として取ったラグランジュ部分多様体が安定ならば手術付きラグランジュ平均曲率流は時間大域解を持ち，極限として特殊ラグランジュ部分多様体に収束する」ということを証明することです．この目標は漠然としているので，実際に研究をする上では，足がかりになる具体的な問題を考えるのが良いと思っています．現在，安定性の概念は深谷圏を使って定義するのが有効と思われています．深谷圏はフレアーホモロジーを使って定義されるわけですが，フレアーホモロジーはラグランジュ部分多様体を境界条件とする正則曲線のモジュライ空間を使って定義されます．従って，この研究の第一歩として以下の問題（１）（２）を考えています.（１）「ラグランジュ部分多様体が平均曲率流に沿って動くときに，そのラグランジュ部分多様体を境界条件とする概正則曲線のモジュライ空間はどう動くか？」（２）「ラグランジュ平均曲率流が特異点を形成する瞬間にそのモジュライ空間の形はどう変化するか？」.

[2] ２つ目の研究は，非線形放物型偏微分方程式の研究です．これは東北大学の高橋仁氏との共同研究です．高橋氏は解析サイドから非線形放物型偏微分方程式の研究を行っています．現在は，ある特定の非線形放物型方程式の特異解の存在問題や，特異集合の近傍での特異解の漸近挙動の研究をしています.高橋氏が解析的なテクニックを提供し，私が幾何学的なテクニックを提供することで，研究が進んでいます．現時点では，PDE が定義されているドメインはユークリッド空間から余次元が高い部分多様体を除いた部分です．しかし，将来的にはドメインをリーマン多様体やより特異な空間にしたいと考えています．また，我々の得られた解析的な結果を深化させ「特異山辺フロー」の幾何解析へ応用することも今後の目標です.

[3] ３つ目の研究は，変形エルミート・ヤン・ミルズ接続 (dHYM) の研究です．変形エルミート・ヤン・ミルズ接続 (deformed Hermitiain Yang–Mills connection) 通称「dHYM」は数学サイドとしては 2000 年に Leung–Yau–Zaslow によって提唱された概念です．彼らは限定的な状況下で，特殊ラグランジュ部分多様体と変形エルミート・ヤン・ミルズ接続は双対トーラス束の間のミラー対応で移りあうことを証明しました．特殊ラグランジュ部分多様体の方は近年活発に研究されていますが，その対応物である変形エルミート・ヤン・ミルズ接続の研究は非常に少ないのが現状です．2017 年に Jacob–Yau がエルミート接続に対して「線束平均曲率流」という概念を定義しました．そして「ある条件のもとでは，エルミート接続を線束平均曲率流で変形すると，変形エルミート・ヤン・ミルズ接続に収束する」ということを証明しました．これはラグランジュ平均曲率流を使って特殊ラグランジュ部分多様体を構成する方法のミラー対応によるカウンターパートと思うことができます.「ある条件」というのは強い条件で，それを外した一般のエルミート接続を線束平均曲率流で変形すると何が起きるかは分かっていません．そこで,現在考えている問題は以下です.（１）「一般のエルミート接続を線束平均曲率流で変形すると，解の爆発は起きるか？起きる場合は，爆発のオーダーはどれぐらいか？」（２）「部分多様体に対する平均曲率流には Huisken の単調性公式があるが，エルミート接続に対する線束平均曲率流に対しては Huisken 型の単調性公式はあるか？」（３）「ユークリッド空間内の部分多様体に対しては自己相似解という概念があるが，エルミート接続には自己相似解という概念をどう定義するのが良いか？」