今後の研究計画

Hessenberg 多様体の幾何，表現論，可積分系

旗多様体の代数的部分集合の中で特に重要なものとして，幾何学的表現論で研究されてきた「Springer 多様体」や，旗多様体の量子コホモロジー環の研究において現れる「Peterson 多様体」,「Weyl chamber の集まりを扇とするトーリック多様体」などがあるが，これらを統一的に記述する空間が Hessenberg 多様体である．A_{n-1} 型の場合は $n \times n$ 行列 X とある条件を満たす関数 $h : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ の組から次のように定義される．

$$\mathrm{Hess}(X, h) = \{V_\bullet \in Fl(\mathbb{C}^n) \mid XV_j \subseteq V_{h(j)}\ (j = 1, \ldots, n)\}$$

一般には，G を複素半単純代数群，B をその Borel 部分群とし，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{b}$ をそれぞれの Lie 環とする．このとき，$x \in \mathfrak{g}$ と，B-安定な部分空間 $\mathfrak{b} \subseteq H \subseteq \mathfrak{g}$ に対して，

$$\mathrm{Hess}(x, H) = \{gB \in G/B \mid \mathrm{Ad}(g^{-1})x \in H\}$$

として定義される．以下，今後の研究課題を述べる．

- **weak Fano Hessenberg 多様体**

（曾昊智氏と藤田直樹氏との共同研究）

A 型の正則半単純な Hessenberg 多様体の特別なケースとして，旗多様体自身やルート系に付随するトーリック多様体などがある．旗多様体は Fano であり，ルート系に付随するトーリック多様体は weak Fano である．そこで，正則半単純な Hessenberg 多様体がいつ weak Fano であるかどうか調べている（いつ Fano であるかは簡単に特徴付けることができる）．そのような正則半単純な Hessenberg 多様体については，ample なトーラス同変直線束の高次コホモロジーの消滅や，その大域切断の空間の Weyl 型の指標公式などが得られ，応用が期待される．この研究は半単純な正則 Hessenberg 多様体のトーリック退化やその上の完全可積分系の構成のための第一歩目のアプローチである．

- **正則冪零な Hessenberg 多様体の特異点集合**

（Erik Insko 氏との共同研究）

A 型の正則冪零な Hessenberg 多様体は（旗多様体を除いて）特異性を持つ代数多様体である．その特異性の一つの情報として，特異点集合を決定したい．正則冪零な Hessenberg 多様体が許容する自然な $\mathbb{C}^*$ 作用の固定点については，その点が特異点であるための必要十分条件を h の情報を用いた組み合わせ論的な規則で与えることができる．今後は，$\mathbb{C}^*$ 作用の固定点とは限らない点の特異性を決定する規則へ一般化したい．また,（冪零とは限らない）正則な Hessenberg 多様体についても特異点集合を調べていきたい．