今後の研究計画

綾野孝則

1. 一般の種数の場合に Buchstaber, Mikhailov の力学系の解を構成する

Buchstaber, Mikhailov は種数 g の超楕円曲線 V_g の 2 次の対称積上の可換なベクトル場に基づいて $\mathbb{C}^4$ 上の力学系を導出した。この力学系は、種数 1 のときは Weierstrass の ζ 関数、種数 2 のときは種数 2 の超楕円関数によって解が与えられる [1]。本研究では、種数 3 の場合にシグマ因子上の有理型関数によってこの力学系の解を構成した (論文リスト 1-1)。この結果を一般化して、一般の種数の場合にこの力学系の解を構成する。そのためには、一般の種数の場合に、V_g 上の 2 点の座標を、そのアーベル・ヤコビ写像による像から表示する公式が必要になる。$g-2 \leq k \leq g$ を満たす自然数 k に対して、V_g 上の k 個の点の座標を、そのアーベル・ヤコビ写像による像から表示する公式は得られている。本研究では、この公式を $k < g-2$ の場合にも一般化する。

2. 一般の種数の超楕円関数の間の関係式から KdV 階層を変形した微分方程式系を構成する

楕円シグマ関数の対数微分で定義される Weierstrass の $\wp$ 関数は、ある定数 $g_4, g_6 \in \mathbb{C}$ について、$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_4\wp - g_6$ という関係式を満たすことは良く知られている。Baker は種数が 2,3 の超楕円曲線に対して、シグマ関数の高階の対数微分を 2,3 階の対数微分で表示する公式を導出した。Buchstaber, Enolskii, Leykin は Baker の公式を任意の種数の超楕円曲線の場合に一般化した。この公式を用いることで、任意の種数の超楕円関数が KdV 階層を満たすことが分かる。$\sigma^{(g)}$ を種数 g の超楕円シグマ関数、$W_g = \{w \in \mathbb{C}^g \mid \sigma^{(g)}(w) = 0\}$ とする。本研究では、種数 3 の場合に、Buchstaber, Mikhailov の力学系を用いて KdV 階層を 2 つのパラメータで変形した微分方程式系を構成し、アーベル・ヤコビ写像を用いて、その解を種数 3 の超楕円曲線のシグマ因子上の有理型関数を用いて構成した。この微分方程式系は、Baker の公式から導かれる W_3 上で成り立つシグマ関数 $\sigma^{(3)}$ の微分の間の関係式からも導出できる。本研究では、種数 g の超楕円関数の間の関係式から、W_g 上で成り立つシグマ関数 $\sigma^{(g)}$ の微分の間の関係式を具体的に書き下し、その関係式を用いて一般の種数の場合に KdV 階層を変形した微分方程式系が得られないか検討する。

3. 任意のリーマン面のシグマ関数の級数展開の代数性を示す

リーマンのテータ関数の級数展開の係数は周期行列で与えられるのに対し、(n,s) 曲線や telescopic 曲線などのシグマ関数の原点における級数展開の係数は代数曲線の定義方程式の係数の (有理数係数の) 多項式になる。この性質がテータ関数とシグマ関数の一番の違いであり応用上重要になる。シグマ関数は任意のリーマン面に対してまで一般化されている [3]。また、全ての代数曲線を表現するモデル (三浦標準形) も知られている [2]。本研究では、任意の代数曲線の定義方程式を三浦標準形で表現し、[3] で定義された任意のリーマン面のシグマ関数の原点における級数展開の係数が定義方程式の係数の有理数係数の多項式であることを示す。

References

[1] V. M. Buchstaber, A. V. Mikhailov, "The space of symmetric squares of hyperelliptic curves and integrable Hamiltonian polynomial systems on $\mathbb{R}^4$", arXiv:1710.00866, (2017).

[2] S. Miura, "Linear Codes on Affine Algebraic Curves", *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol. J81-A, Issue 10, (1998), 1398–1421.

[3] A. Nakayashiki, "Tau Function Approach to Theta Functions", *International Mathematics Research Notices*, Volume 2016, Issue 17, (2015), 5202–5248.