これまでの研究成果

綾野孝則

1. ヤコビの逆公式の telescopic 曲線への一般化

種数 g の超楕円曲線 V_g に対して、V_g 上の g 個の点の座標は、そのアーベル・ヤコビ写像による像から超楕円シグマ関数を用いて表示できる (ヤコビの逆公式)。松谷氏らは、(n,s) 曲線の特別な場合である $y^r = f(x)$ で定義される代数曲線に対して、この表示公式のある一般化を与えた [2]。本研究では telescopic 曲線 ((n,s) 曲線を含む) までシグマ関数を一般化し (論文リスト 1-3)、松谷氏らの公式を telescopic 曲線まで一般化した。具体的には、種数 g の telescopic 曲線上の g 個の点の座標から構成されるある有理関数を、その点のアーベル・ヤコビ写像による像から、telescopic 曲線のシグマ関数を用いて表示した。得られた公式は、超楕円曲線の場合には、ヤコビの逆公式と一致する。また、g より少ない個数の点についても、その点の座標から構成されるある有理関数を、その点のアーベル・ヤコビ写像による像から逆に表示する公式をある条件の元で与えた。さらにこれらの公式を用いて、telescopic 曲線のシグマ関数の零点の新しい性質を示した。これらの結果は論文リスト 1-2 にまとめられてる。

2. 種数 3 の超楕円曲線のシグマ因子上の有理型関数体の構成

超楕円曲線のヤコビ多様体の点でシグマ関数が零になる点全体をシグマ因子という。本研究では、種数が 3 の場合に、$\mathbb{C}^3$ 上の有理型関数であって、シグマ因子に制限すると周期的になるもの全体をシグマ因子上の有理型関数体と呼び、その代数的構造 (生成元とその間の関係式) を決定した。さらに、種数 3 の超楕円曲線の 2 次の対称積上の有理型関数体とシグマ因子上の有理型関数体がアーベル・ヤコビ写像により同型になることを示した。これらの結果の応用として、[1] で導入された多項式力学系の解を種数 3 の場合にシグマ因子上の有理型関数を用いて具体的に構成した。この力学系は、超楕円曲線の 2 次の対称積上の可換なベクトル場に基づき Buchstaber, Mikhailov により構成された力学系であり、種数 2 のときは Dubrovin 系に対応する。これらの結果は Buchstaber 氏との共同研究であり、論文リスト 1-1 にまとめられてる。

3. KdV 階層を 2 つのパラメータで変形した微分方程式系の構成

任意の種数に対して、超楕円シグマ関数の対数微分で定義される超楕円関数は KdV 階層の解になる。本研究では、種数 3 の場合に、[1] で導出された力学系を用いて、KdV 階層を 2 つのパラメータで変形した微分方程式系 (two parametric deformed KdV-hierarchy) を構成した。そしてこの微分方程式系の解を種数 3 のシグマ関数の微分の比で定義される関数で構成した。種数 3 の超楕円曲線を種数 2 の超楕円曲線に退化させるとこの微分方程式系は KdV 階層になる。また、種数 3 の超楕円曲線の定義方程式の全ての係数を 0 にする極限 (有理極限) を考えることで、KdV 階層の有理解を導出した。さらに、この有理解は種数 2 の超楕円関数の有理極限としても得られることを示した。この結果は、シグマ関数の退化に関するある視点を与えている。また、この有理解は、空間の座標 x を無限大にしたとき、$O(1/x^2)$ のオーダーで 0 に収束する解であり、この解をポテンシャルにもつシュレーディンガー方程式は物理において重要な解を持つ。これらの結果は Buchstaber 氏との共同研究であり、論文リスト 2 にまとめられてる。

References

[1] V. M. Buchstaber, A. V. Mikhailov, "Infinite dimensional Lie algebras determined by the space of symmetric squares of hyperelliptic curves", *Functional Analysis and Its Applications*, Volume 51, Issue 1 (2017), 2–21.

[2] S. Matsutani, E. Previato, "Jacobi inversion on strata of the Jacobian of the C_{rs} curve $y^r = f(x)$", *Journal of the Mathematical Society of Japan*, Volume 60, Number 4 (2008), 1009–1044.