研究計画

Hardy-Sobolev 不等式に関連する変分問題

(i) 3 次元問題について

Sobolev 埋め込みに関連する変分問題において、3 次元のみ状況が異なっているという結果が Brezis-Nirenberg (1983) によって得られた。4 次元以上で解決されている問題が 3 次元では未解決のまま残っているものも存在する。Hardy-Sobolev 型埋め込みに関する変分問題においても同様の状況となっていることがわかり、この 3 次元での未解決問題に取り組む。

(ii) 最良定数について

現在まで研究してきた Neumann 型不等式においては、一般領域における最良定数の厳密な表示は得られていない。まずは領域が球の場合の最良定数の厳密な表示について研究を行う。一方、ある特定の領域では、最良定数は Dirichlet 型不等式の最良定数と一致することが現在までの研究によって得られている。この Neumann 型不等式の最良定数と Dirichlet 型不等式の最良定数が一致することについて、何らかの裏付け、もしくは関係があるかどうかについても研究する。

Sobolev 埋め込みの非コンパクト列について

(i) 全空間 Sobolev 埋め込み

$W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ から $L^p(\mathbb{R}^N)$ への埋め込みは非コンパクトであることが知られており, これは $L^p(\mathbb{R}^N)$ ノルムを不変にするスケール変換の存在が一つの要因である。この埋め込み $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ において、コンパクト性の破綻の要因はスケール変換のみであるか否かという問題は未だに解決しておらず、この問題に取り組む。

(ii) Trudinger-Moser 型汎関数

Trudinger-Moser 型汎関数における非コンパクト性に関しては、Sobolev 埋め込みとは異なる部分が多い。この非コンパクト性の本質を明らかにするために、変分問題における集中現象の解析や、方程式の解における漸近挙動などの定性的研究などから行う。これらの結果を用いて、一般の非コンパクト列における解析を行っていく。