研究成果

Sobolev 埋め込み及びそれに関連する関数不等式、変分問題の研究を行ってきた。埋め込み作用素に関して、臨界においてはノルムに関するある種のスケール不変性によってコンパクト性が破綻する。このコンパクト性の破綻により、最良定数の達成の成否や楕円型方程式の可解性、解の性質など様々な特異な現象が見られることが知られており、新たな現象の発見及びそのメカニズムを明らかにすることが主な研究である。研究成果については以下の 4 つがある.

L^p-Lyapunov 不等式　L^p-Lyapunov 不等式は線形の楕円型方程式における可解性の必要条件である。この問題は Sobolev 埋め込みと非常に深く関連しており、線形の問題にも関わらず、非線形の問題と非常に強い関係性を持っている。Neumann 境界条件の問題において、現在まで臨界と呼ばれる部分が未解決のまま残っていたが、対応する Sobolev 埋め込みの最良定数に関する最小化関数の存在を証明することにより、部分的にではあるが解決することができた。関連する問題として、非線形 Neumann 型と呼ばれる境界条件に関する同様の問題も考察し、高橋太氏との共同研究により、非線形 Neumann 境界条件型の L^p-Lyapunov 不等式も導出した。

Hardy-Sobolev 不等式に関連する最小化問題　Hardy-Sobolev 不等式に関連する最小化問題に関して、Neumann 型と呼ばれる境界条件を課さない Sobolev 空間における問題を研究した。Sobolev 空間から重み付き Lebesgue 空間への埋め込みを考察するこの問題では、重み関数の特異点が領域の境界にあり、かつその点での平均曲率が正の場合に最小化関数は存在する、という結果のみが先行研究としてあった。私は未解決の部分の問題を研究し、これらの問題に関しては、特異点の位置、平均曲率の他に、領域のスケールが最小化関数の存在・非存在に影響を与えていることを示した。この結果を踏まえて、関連する非線形楕円型方程式の可解性、解の性質に関する研究を、C.-H. Hsia 氏、G. Hwang 氏と共に行った。

Sobolev 空間から変数指数 Lebesgue 空間への埋め込みのコンパクト性　Sobolev 埋め込みに関する研究を佐野めぐみ氏と行った。埋め込みの非コンパクト性の要因は有界列の “集中現象” の他に、全空間では “消失現象” と呼ばれるものも 1 つの要因となる。Lebesgue 空間における可積分指数を変数指数にし、その変数指数の挙動と埋め込みのコンパクト性との関係を調べると、消失減少に関する臨界指数への漸近の仕方が log を境にして、埋め込みのコンパクト性の成否が分かれるという結果を得た。この結果を用いて、無限遠方で線形の挙動をする非線形項を持つ楕円型方程式の可解性に関する結果も得た。

Trudinger-Moser 不等式に関連する最大化問題　古典的 Trudinger-Moser 不等式に関する変分問題において最大化関数の存在は知られているが、非コンパクト性の要因となっている集中現象の詳細については近年まで知られていなかった。Mancini-Martinazzi（2017）の結果を皮切りに, 集中現象に関するある意味で最善な汎関数の形が P.-D. Thizy (2018) や Ibrahim-Masmoudi-Nakanishi-Sani (2019) らによって得られている。これらの結果とほぼ同時期に、Trudinger-Moser 型汎関数において、最大化関数の存在、非存在を分ける境界の存在を証明し、厳密な汎関数の形状の 1 つを発見した。