

研究成果

有限次元既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群のテンソル積の中に現れる有限次元既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群の多重度（分岐係数）は、安定化領域において Littlewood-Richardson(LR) 係数 3 個の積の和で表現される．ここで、 \mathfrak{g} は $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ (B_n 型)、 $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ (C_n 型)、および $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ (D_n 型) である．この分岐則公式を柏原クリスタルで表現する研究を行った．まず、 C_n 型の LR クリスタルから A_{n-1} 型の 2 つの LR クリスタルの直積への全射を具体的に構成した．この全射においては、2 つの A_{n-1} 型の LR クリスタルの濃度が 2 つの LR 係数に対応し、全射の核の濃度が第 3 の LR 係数になっている．これは C_n 型の Kashiwara-Nakashima(KN) タブローに関する複雑な組み合わせ論的手法による．副産物として、 C_n 型 KN タブローの条件を与えるより精密な不等式を得た．次に、安定化領域では B_n と型 D_n 型の LR クリスタルは C_n 型の LR クリスタルと同一であることを証明した．この部分は、韓国ソウル国立大学 Jae-Hoon Kwon 教授との議論からの成果である．この研究の内容は、90 ページを超える論文にまとめられ、Math. J. Okayama Univ. に掲載予定である [2]．

引き続き、奇妙な Lie 超代数 (queer Lie superalgebra) のクリスタル $\mathfrak{q}(n)$ について研究した．まず、2010 年 Serrano により導入された混合挿入アルゴリズムを用い、プライムド・タブローの集合に $\mathfrak{q}(n)$ クリスタルの構造が入ることを証明し、奇型の柏原作用素のアルゴリズムを具体的に与えた．偶型の柏原作用素のアルゴリズムは 2017 年 Hawkes 等によって発見されていた [1] ので、本結果はその拡張になっている．また、正規 $\mathfrak{q}(n)$ クリスタルに特徴的な最高ウェイト・ベクトルおよび最低ウェイト・ベクトル（ともに一意に存在する）の形も決定した．これらの結果を用い、さらに B 型 Coxeter 群の簡約語の符号付ユニモダル分解 (m 因子) の集合に $\mathfrak{q}(m)$ クリスタルの構造が入ることを解明した．クリスタルの連結成分は、 B 型 Coxeter-Knuth 関係で結ばれた簡約語の符号付ユニモダル分解から構成されることを示した．偶型の柏原作用素は、符号付プライムド・タブローに作用する柏原作用素と B 型の Kraśkiewicz 挿入アルゴリズムから構成される．奇型の柏原作用素については、そのアルゴリズムを具体的に与えた．同様の議論により、 D 型 Coxeter 群の簡約語から派生する平坦語の符号付ユニモダル分解 (m 因子) の集合にも $\mathfrak{q}(m)$ クリスタルの構造が入ることを示した (D 型の場合、Coxeter-Knuth 関係は B 型と異なり、平坦語に対して定義される)．クリスタルの連結成分は、 D 型 Coxeter-Knuth 関係で結ばれた平坦語の符号付ユニモダル分解から構成され、偶型の柏原作用素は、 B 型の Kraśkiewicz 挿入アルゴリズムを D 型に変更するだけでよく、奇型の柏原作用素のアルゴリズムは B 型のものと同じである．この研究の内容は、Publ. RIMS Kyoto Univ. に掲載予定である [3]．

参考文献

- [1] G. Hawkes, K. Paramonov, and A. Schilling, Crystal analysis of the type C Stanley symmetric functions, *Electronic J. Combin.* **24** (2017) #P3.51.
- [2] T. Hiroshima, Crystal interpretation of a formula on the branching rule of type B_n , C_n , and D_n , to appear in *Math. J. Okayama University*.
- [3] T. Hiroshima, \mathfrak{q} -crystal structure on primed tableaux and on signed unimodal factorizations of reduced words of type B , to appear in *Publ. RIMS Kyoto University*.