これまでの研究成果のまとめ

私はこれまでHessenberg多様体のトポロジーについて研究してきた．Hessenberg多様体とは旗多様体の部分多様体であり（一般に特異点を持つ），そのトポロジーは他分野との関係を持ち，以下に挙げる多様体を含んでいる．

(1) Springer多様体（Weyl群の幾何学的表現と関連）
(2) Peterson多様体（旗多様体の量子コホモロジーと関連）
(3) Permutohedral多様体（Weyl cambersを扇とするトーリック多様体）

私はまずA型において，Springer多様体のトーラス同変コホモロジー環の計算を行い，その後Peterson多様体を自然に拡張するHessenberg多様体のクラスでregular nilpotent Hessenberg多様体と呼ばれる多様体の(同変)コホモロジー環の計算を行った．一方，Permutohedral多様体を自然に拡張するHessenberg多様体のクラスとしてregular semisimple Hessenberg多様体と呼ばれるものがあり，regular nilpotent Hessenberg多様体を$\mathrm{Hess}(N,h)$，regular semisimple Hessenberg多様体を$\mathrm{Hess}(S,h)$と表すことにすると(これらはHessenberg関数hをパラメータとして持つ旗多様体の部分多様体族)，これらのコホモロジー環[1]の間に以下の環同型があることを示した．

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h)) \cong H^*(\mathrm{Hess}(S,h))^{\mathfrak{S}_n}$$

ここで，右辺はn次対称群$\mathfrak{S}_n$の作用による不変部分環を表し，$H^*(\mathrm{Hess}(S,h))$上の$\mathfrak{S}_n$作用はGKMグラフを用いてTymoczkoにより導入されたものである．

さらに，任意のLie typeにおいてregular nilpotent Hessenberg多様体のコホモロジー環が超平面配置の言葉を用いて記述できるという驚くべき結果も得られた．この結果から上記のA型における環同型が任意のLie typeでも成立することが分かり，さらにDale Petersonが予言したことの証明を与え，Sommers-Tymoczko予想の解決，B,C,G_2型においてもregular nilpotent Hessenberg多様体のコホモロジー環の明示的表示を与えることができた．また，A型regular nilpotent Hessenberg多様体のコホモロジー環の明示的表示における基本関係式は，Schubert多項式の交代和で書けるという興味深い結果も得られた．

一方，A型におけるregular semisimple Hessenberg多様体のコホモロジー環上のTymoczkoにより導入された対称群$\mathfrak{S}_n$の作用は，グラフ理論におけるchromatic quasisymmetric functionと綺麗な対応があることが知られている．特別な場合のregular semisimple Hessenberg多様体のコホモロジー環の明示的表示を得，そこから上記で述べたグラフ理論との対応により，グラフ理論におけるStanley-Stembridge予想が特別な場合に対して正しいことも分かった．また，regular semisimple Hessenberg多様体の体積多項式がGelfand-Zetlin多面体のいくつかの面の体積の和で記述できることが分かり，そこからtableauxの言葉を用いたregular semisimple Hessenberg多様体の体積多項式の明示的公式も得られた．

[1]コホモロジーは有理数係数の特異コホモロジーを表す．