今後の研究の概要

いくつかの記号についてはこれまでの研究の概要を参照のこと.

1. 重み付き多項式近似の誤差評価について: 現在のところ, 評価

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \le CT^{1/4}(a_n)E_{p,n}(w; f). \tag{1}$$

が精密なものであるか否かは不明である. 証明の手法次第で T の次数をより下げられる可能性がある. また, Erdős 型重みの条件 $T(a_n) \le c\,(n/a_n)^{2/3}$ も何らかの形で弱められる可能性がある.

2. **de la Vallée Poussin 平均の微分の評価について**: これまでに, de la Vallée Poussin 平均の微分の L^p 有界性も証明した. そのうちのひとつが次の評価である: w は $\mathcal{F}(C^2+)$ のより滑らかな部分集合 $\mathcal{F}_\lambda(C^4+)$ に属するものとする. $T^{(2j+1)/4}fw \in L^p(\mathbb{R})$ のとき, $2 \le p \le \infty$ ならば,

$$\|v_n(f)^{(j)}w\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\left(\frac{n}{a_n}\right)^j \|T^{(2j+1)/4}fw\|_{L^p(\mathbb{R})}, \tag{2}$$

$1 \le p \le 2$ ならば

$$\|v_n(f)^{(j)}w\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\left(\frac{n}{a_n}\right)^j a_n^{(2-p)/2p}\|T^{(2j+1)/4}fw\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

が任意の $1 \le j \le k$ 及び $n \in \mathbb{N}$ について成り立つ. これまでは L^1 ノルムの双対性と Riesz-Thorin の補間定理を de la Vallée Poussin 平均の L^p 有界性を証明するときに使用した. しかし, 証明中に T が残ってしまい, その非有界性のために L^1 ノルムの双対性を利用できない. 現在は (2) が $1 \le p \le 2$ の場合に成立するかは不明である. T の非有界性による評価の困難を解消する方法を見付けることが解決の糸口である..

3. **Lagrange の補間多項式による近似について**: これからの研究のもうひとつの対象は $w^* \in \mathcal{F}(C^2+)$ に関する Lagrange の補間多項式 $L_n(f)$ についてである. ここで f は $\mathbb{R}$ 上の連続関数である. 次を目標とする:

$$\lim_{n\to\infty} \|(f - L_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

これまでは Erdős 型重みに関する評価を証明する際には, $w \in \mathcal{F}_\lambda(C^3+)$ に対して重みの軟化という手法を利用した. これを利用すると $T^\alpha w$ が $w^* \in \mathcal{F}(C^2+)$ に置き換わる. $L_n(f)$ は w についての直交多項式系 $\{p_n\}$ に直接依存しているだけでなく p_n の零点にも依存するため, 重みを置き換える軟化を利用するのはより難しくなる. 課題の策のひとつは $L_n(f)$ が直接関連する場面で軟化の手法を利用しない方法を見付けることである.

4. **Laguerre 型重みについて**: 加えて, 上記の研究の応用として, $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ の場合についての研究がある. これは Laguerre 多項式の理論とも関連の深い重要な分野の一つである. まずは $\mathbb{R}^+$ 上に $\mathbb{R}$ についての $\mathcal{F}(C^2+)$ に対応する重みのクラスを定義し, その重みについての直交多項式, MRS 数や $\mathcal{F}(C^2+)$ の場合における関数 T に対応するものの性質を調べることを始めとする.