# これまでの研究の概要

研究のテーマはポテンシャル論の応用としての多項式近似の理論である. $\mathbb{R}$ 上では, 多項式 $P(x)$ は $|x| \to \infty$ のとき発散するため, 重み関数 $w(x)$ を乗じて考えなければならない. ここで, $1 \le p \le \infty$, $fw \in L^p(\mathbb{R})$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \|(f - P_n)w\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{A}$$

次をみたすような多項式の列 $\{P_n\}$ は存在するか. 存在すればその具体的な形は何か.

当研究では重み $w$ は $\mathcal{F}(C^2+)$ と呼ばれるクラスに限って扱うものとする. $w$ を $w(x) = \exp(-Q(x))$ とし, $T(x) := xQ'(x)/Q(x)$, $(x \neq 0)$ とおく. $T$ が有界のとき $w$ を Freud 型重みといい, 非有界のとき $w$ を Erdős 型重みという. $f$ の de la Vallée Poussin 平均 $v_n(f)$ を $v_n(f)(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{2n} s_j(f)(x)$ と定義する. ここで $s_m(f)(x)$ は $f$ の $w$ に関する直交多項式系の第 $n$Fourier 部分和である. $f$ に対して近似度 (誤差) を $E_{p,n}(w; f) := \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|(f - P)w\|_{L^p(\mathbb{R})}$ とする. 但し, $\mathcal{P}_n$ は次数が高々$n$ 次の多項式からなる集合である.

1. **重み付き多項式近似の誤差評価について**: $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ は或る $c > 0$ について $T(a_n) \le c\,(n/a_n)^{2/3}$ をみたすものとする. ここで $a_n$ とは $w$ の MRS 数と呼ばれる量である. このとき或る定数 $C \ge 1$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ 及び $fw \in L^p(\mathbb{R})$ に対し次が成立する:

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \le CT^{1/4}(a_n)E_{p,n}(w; f). \tag{B}$$

   H. N. Mhaskar らは (B) を Freud 型重みについて証明している. この結果は Mhaskar の評価を Erdős 型重み含むより一般への拡張である. 証明においては de la Vallée Poussin 平均の $L^p$ 有界性が重要である.

2. **de la Vallée Poussin 平均の収束について**: ここで,

$$\lim_{n\to\infty} \|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{C}$$

   が Erdős 型重みのときに成立するのは如何なる場合か? $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ であれば $n \to \infty$ のとき $E_{p,n}(w; f) \to 0$ であることが知られている. もし $w$ が Freud 型ならば (C) は成立する. しかし $w$ が Erdős 型の場合は $T$ の非有界性より (C) はいつも成立するとは限らない. この問題に対し当研究では次の二条件を示した: $w$ がより滑らかな部分集合 $\mathcal{F}_\lambda(C^3+)$ に属し $T^{1/4}fw \in L^p(\mathbb{R})$ ならば, 重みの軟化という手法を利用して (C) が示される. 一方, $f$ は絶対連続で $f'w \in L^p(\mathbb{R})$ ならば, Jackson-Favard の不等式により (C) が示される. このことは $f$ の de la Vallée Poussin 平均が (A) の多項式の具体的な一例であることを示している. さらに $f$ が後者の条件かつ $f''w \in L^p(\mathbb{R})$ ならば $f$ の de la Vallée Poussin 平均は $f$ だけでなくその導関数 $f'$ に対しても良い近似を与えていることも示した.

3. **Fourier 部分和の一様収束性について**: これとは別に, 重みが $\mathcal{F}_\lambda(C^3+)$ の場合に Fourier 部分和 $s_n(f)$ の収束性について考察した: $f$ は連続かつ $\mathbb{R}$ の任意の有界閉区間で有界変動関数であるとき. $\int_{\mathbb{R}} w(x)|df(x)| < \infty$ ならば次が成立する:

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(f - s_n(f))\frac{w}{T^{1/4}}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$