(2) これまでの研究成果のまとめ　　真瀬 真樹子

(a) 具体的な $K3$ 曲面は例えば Fano である重み付き射影空間や 3 次元非特異 Fano 多様体の完備反標準線型系をパラメータ空間として得られる.

[Kobayashi-Mase, 2012], [Mase, 2012], [Mase, 2014] の研究結果により, 同型な Picard 格子を持つある $K3$ 曲面族は双有理同値であることがわかった. これらの研究では Torelli 型定理を用いずに, 族の一般切断の間に具体的に単項式写像を構成することにより定理を証明した.

(b) Ebeling と Takahashi, 及び, Ebeling と Ploog は可逆多項式の間に奇妙な双対性があることを見出した. [Mase-Ueda, 2015] と [Mase, 2016–17] では, modality が 2 の特異点の間の奇妙な双対性が $K3$ 曲面族の間の Batyrev-Borisov ミラー対称性に拡張することを見付けた. 更に, これらの $K3$ 曲面を含む 3 次元トーリック多様体が simplicial であるならば, このミラー対称性は Picard 格子の間の双対性に拡張することがわかった. これらの研究で扱われた $\mathbb{C}^3$ の孤立超曲面特異点は, 全て可逆多項式で与えられる射影化を有している.

(c) 投稿中の論文 [Curves on weighted $K3$ surfaces of degree two with symmetric Weierstrass semigroups, J.Komeda and M.Mase] では, 与えられた Weierstrass 半群を持つ点付き曲線を部分多様体として含む $K3$ 曲面が存在することを示した.

(d) Tokunaga らにより, $(2,3)$ トーラス型曲線で分岐する, 射影平面の 2 次被覆を考えると, また, このときに限り, 射影平面の Galois でない 3 次被覆の正規化である Gorenstein $K3$ 曲面から, $\mathbb{P}^2$ の 2 重被覆である $K3$ 曲面への 3 次巡回被覆が得られることが知られている.

この事実に基づき, 投稿中の論文 [Families of $K3$ surfaces and curves of $(2,3)$-torus type] では, $(2,3)$ トーラス型曲線で分岐する, 射影平面の 2 次被覆として得られる $K3$ 曲面族に焦点を当てた.

$(2,3)$ トーラス型 6 次曲線は Oka と Pho により分類され, 定義多項式も与えられている. このことから, 考えている $K3$ 曲面族は重み $(1,1,1,3)$ の重み付き射影空間の完備反標準線型系の部分線型系として具体的に表示することが可能である.

論文の前半では族に付随する, 多面体の双対性と Picard 格子の双対性について調べた. また, 後半ではそれぞれの分岐曲線の特異点を含む $K3$ 曲面族の特徴付けを行った.

$K3$ 曲面の代数的な部分多様体が Picard 格子を生成すると言う意味で, 以上の研究結果は, それらのひとつの特徴付けを行うことができると期待している.