今後の研究計画

松本堯生

今や不変量が自明な可微分多様体の問題は４次元トポロジーの主要な古典的難問と言えます。とくに２次元滑らか結び目は補空間の基本群が整数群と同型なら解けるかという２次元滑らか結び目解け予想と４次元可微分ホモトピー球面は４次元球面に微分同相かという４次元可微分ポアンカレ予想が重要と考えられます。

私は 10 数年以上前者を研究しています。手法は鎌田聖一氏が開発した２次元ブレイド理論を用います。実際、２次元滑らか結び目は補空間の基本群が整数群と同型なら、２次元球面から４次元空間への特異点としてカスプの生滅のみを許す写像の１助変数族で自明な結び目とつながります。さらにこれを２次元ブレイドの１助変数族に変換します。そのためにはノードを含む場合に適用可能な拡張されたマルコフ型定理が必要ですが、鎌田氏が詳しい一般的な論文を準備中です。

２次元ブレイドが平面上の１次元チャート図形で表されることを用いると、その１助変数族は時間軸を付け加えて３次元空間内に表せます。すると適当な上部カスプを取り、自明な２次元ブレイドである一番下の端点近くまで位置を下げることができ、カスプの生滅の間に他の交点はなくなります。この状況をカスプの局所表示やブレイド群を使って解析すると、例えばこの部分の両端は自明なトーラスを連結和するとイソトピックな埋め込みとなることが分かり、帰納法によって元の結び目は自明なトーラスを１つ連結和すると、自明なトーラス結び目となることが分かります。これがマルコフ型定理を仮定した最新の結果です。

従って、マルコフ型定理の証明とここまでの結果を発表することが重要と考えられます。その後はいろいろな多角的な挑戦方法があり得ますが、もう一度２次元ブレイドの１変数族の解析に徹するのも意外と良い方法かもしれません。

いずれにしてもこれらの方法で大問題を解決するには鎌田氏との共同研究が必要と考えます。