今後の研究計画

1. 面積制約条件下での弾性曲線の形状

1966 年，M. Kac は「Can one hear the shape of drum?」というタイトルの論文において，“Dirichlet 条件つきの Laplacian の固有値がすべて一致すれば 2 つの領域は合同か？”との問題を提唱した．この問題に関連して，K. Watanabe は面積制約条件の下での弾性曲線に関する変分問題を提唱し，Euler-Lagrange 方程式を導出した．さらに，面積が周長から定まる円に近い場合の最小解の一意性と領域の凸性を示した.

この問題に対して，我々は楕円関数･完全楕円積分を用いて，Euler-Lagrange 方程式の全ての解の表示公式を発見し，それを用いて大域的な構造を明らかにしている. しかし，回転数が 1 の場合，解曲線のなかに単純閉曲線ではない曲線が存在するが，その条件を数学的に示せていない. また，第 2 変分を調べることにより, 最小解の安定性について解析を行う.

2. 赤血球の２次元モデルの形状変形問題

1967 年，Tadjbakhsh-Odeh により赤血球の 2 次元数理モデルの形状変形の数値計算結果が示された．これは，容器 (2 次元弾性曲線内) の内圧を一定にし，その境界に均等に外圧をかけた時の容器の変形を調べる変分問題ともいえる．この変分問題の Euler-Lagrange 方程式も非局所非線形 2 階境界値問題である．この Euler-Lagrange 方程式の全ての解の表示式を発見し，それを用いることにより，最小化解の大域的構造・形状を完全に明らかにしている．

この変分問題の条件として, 外圧をかけても周の長さは常に一定であることが仮定されている． また，変分問題の解として, 自己交差をおこすような曲線も存在する． 物理的な観点より，この変分問題に対して次の条件を満たす変分問題を再設定し解の解析を行う.

(1) 弾性閉曲線の境界に不均一な外圧をかける
(2) 外圧をかけたときに弾性閉曲線の周の長さが変わる．
(3) 自己交差を起こす曲線に対して，エネルギーが発散するような汎関数の設定

3. Derivative nonlinear Schroedinger equation の定常問題

周期境界条件をもつ Derivative nonlinear Schroedinger equation（以降,DNLS と省略）の定常問題の解析を行う. DNLS は，プラズマ内における電波の伝播を記述する偏微分方程式であり，さまざまな条件のもとでの研究が行われている． 周期境界条件をもつ DNLS の定常問題は，2 階の非局所非線形境界値問題であり，楕円積分, 楕円函数を用いて全ての解を完全に表現することができる．現在, 数式処理ソフトを援用して大域的構造の綿密な予想を立てており，最終的には大域的構造の数学的証明を与えることを目標としている.

表現定理の結果は，2014 年度の AIMS にて報告した ([H1])． また，英語論文投稿中である ([C1])． この研究は, 広島大学　坂元国望教授と龍谷大学　四ツ谷晶二教授との共同研究である.