これまでの研究成果のまとめ

長瀬優子

注：論文１－５とは, 別紙の研究業績リストにあげた論文のことである.

応募者はこれまで結晶表面等物理現象で現れる２つの異なる相の境界，すなわち相界面の数学的解析の研究を行って来た．相界面の解析にも様々な方向性があるが，特に２つの着眼点から研究を進めて来た．ひとつは界面の曲率の「非等方性」に着目した研究（論文３，５）である． この性質は結晶成長等の実際の物理現象を解析する上では欠かせない性質であるが，その反面数学的扱いは大変困難である．偏微分方程式論からの解析的な理解に加えて幾何学的視点からの構造の理解も必要となる．そしてもうひとつはその手法である（論文３，４）．相界面の解析においては粘性解やレベルセット法等様々なアプローチがあるが，特に手法として相界面を内部遷移層のある界面領域で近似しその極限として捉え，厳密な数学的理論付けを特に「幾何学的測度論」の枠組みを用いて行った．この方向性では，実数値関数に対する Ginzburg-Landau 型のエネルギー汎関数（以下 Modica-Mortola 型エネルギーと呼ぶ）の扱いがとても重要となる．

応募者は大学院在籍時より楕円型偏微分方程式の一般論と幾何学的測度論の基礎論を学び，偏微分方程式論からの非等方的曲率流の研究と幾何学的測度論を用いた Modica-Mortola 型エネルギー汎関数の解析を行って来た．更にポスドク研究員就任以降はそのエネルギー汎関数に非等方的効果を加えたエネルギーの解析と更に Modica-Mortola 型エネルギーの解析を応用した界面に係る種々の問題に取り組んで来た．以下これまでの主な研究成果の概要を記す．

論文５では「非等方的曲率流」の研究を行った.「非等方的曲率流」は曲面の運動方程式であり「等方的曲率流」である「平均曲率流」の一般化で，曲面がある方向には成長し易いがある方向には成長しにくいといった性質を持つ曲率流である.「非等方性」の数学的な困難さを回避するため本研究では曲面をグラフ表示し，熱方程式の解との比較を行った．空間１次元の熱方程式の性質としてよく知られている S.B. Angenent 氏によって示された『ゼロ点の数は時間に関して非増加である』という性質を利用し，特別な初期値の熱方程式の解を比較関数として用いることにより，空間１次元の非等方的曲率流の解の内部勾配評価を得た．

論文４では, Modica-Mortola 型エネルギー汎関数の critical point についての研究を行った．本研究は利根川吉廣氏との共同研究である．このエネルギー汎関数の体積一定制限下での最小化問題に関しては極小曲面の観点からも大変興味深く歴史的には L. Modica 氏によりエネルギー汎関数が体積一定下での面積最小曲面の周長に収束すること，更には L. Modica 氏と S. Mortola 氏や P. Sternberg 氏によりガンマ収束することも示されている．更に界面の曲率に関しての研究としては，S. Luckhaus 氏と L. Modica 氏により最小化解がみたす Euler-Lagrange 方程式を考えたとき体積一定条件から現れる Lagrange 乗数が極限界面の平均曲率に収束することが示されている．

エネルギー最小化解のみならず一般の critical point に関して研究に関しては，数学的に非常に弱い枠組みでの考察が必要となり，まずその化学ポテンシャルに当たる量（最小化問題では Lagrange 乗数に当たる）が定数の場合 J.E. Huchinson 氏と利根川吉廣氏により，ま

た適当なソボレフノルムが有界なクラスでは 利根川吉廣氏により varifold を使った枠組みで研究されている．

本論文ではこれらの背景を踏まえ，化学ポテンシャルに当たる量の L^2-ノルムの適当なオーダーでの有界性を仮定した．この仮定はこの解析を平均曲率流の Brakke's motion や確率 Allen-Cahn 方程式のスイッチングの問題等の種々の問題に応用できるという点からも大変意味のある仮定であり，また De Giorgi の予想の一般化に当たることからも，この仮定化で多くの研究者に取り組まれて来た．本論文以前にも，G. Bellettini 氏と L. Mugnai 氏により特別な解である球対称な解に対して，また R. Moser 氏により空間３次元で１方向の微分が非負であるという技術的な仮定下で研究されていたが，最終的な解決はなされていなかった．

本研究の成果として論文４において，弱い枠組みとして一般化した Willmore functional を用いることにより，空間２次元の場合の最終的な解決を行った．すなわち，化学ポテンシャルに当たる量の L^2-ノルムの適切な有界性を仮定すると極限界面が生成され，その化学ポテンシャルに当たる量は極限界面の平均曲率に測度的に弱い意味で収束することを証明した．

論文３において，Modica-Mortola 型エネルギー汎関数に非等方的な効果を加えたエネルギー汎関数に関して研究を行った．このエネルギー汎関数に関して，上に挙げた L. Modica 氏と S. Mortola 氏や P. Sternberg 氏の結果の非等方的な場合への拡張として，G. Bouchitté 氏や A. Braides 氏らにより，非等方的な面積汎関数にガンマ収束することが知られている．この非等方的な面積汎関数は等方的な場合の周長の自然な拡張に当たる．

一般に非等方的なエネルギー汎関数についてはその界面の regularity の議論の中で強力なツールとなる monotonicity formula が成り立たないということ知られている．この異方性の持つ困難を回避するため，このエネルギー汎関数の体積一定下条件下での最小化問題について研究を行った．界面の曲率に関しても等方的についての結果の自然なアナロジーとして，特異極限として現れる界面の曲率には，この非等方的な面積汎関数から導かれる非等方的曲率を考慮するのが自然と予想される．幾何学的にはこの非等方性は幾何学的には Finsler metric を用いて定式化される．研究成果として，エネルギー最小化解が満たす Euler-Lagrange 方程式について，体積一定条件より表れる Lagrange 乗数が，極限界面の『非等方的曲率』に収束するということを証明した．

論文２では，論文４で扱ったフェイズフィールドによる界面の解析を応用して確率 Allen-Cahn 方程式について研究を行った．通常の Allen-Cahn 方程式は２つの安定解を持つのだが，ホワイトノイズ付き Allen-Cahn 方程式を考えると，ごく稀に一方の安定状態からもう一方の安定状態へスイッチする現象が起こる．W.G. Faris 氏と G. Jona-Lasinio 氏によってこのスイッチする確率は，action functional と呼ばれる汎関数の最小値を用いて表されることが証明されている．そこでその汎関数の最小値とその最小値を実現する関数は何であるかを具体的に求めることが興味の対象となる．２つの時刻の間の action finctional はそれぞれの時刻の Modica-Mortola 型エネルギー汎関数の差で評価できるということから，論文４で扱ったこの最小化問題では Modica-Mortola 型エネルギーによる相界面の解析が大変有効である．本研究の成果として，空間１次元で２つの安定性の起こりやすさが異なる場合の action functional の最小値とそれを実現する最小化解を具体的に表示した．

論文１では，近年 G. Karali 氏と M.A. Katsoulakis 氏によって２つのスケールの異なる現象の効果を考慮し導出された Cahn-Hilliard/Allen-Cahn 方程式について研究を行った．こ

の方程式は Modica-Mortola 型エネルギーを時間共に減少させる方程式であり，４階の偏微分方程式であるが適当なスケーリング下での特異極限は２階の方程式である Allen-Cahn 方程式と同様の性質を持つ．興味深い結果として G. Karali 氏と M.A. Katsoulakis 氏により，適当なスケーリングをした方程式の特異極限は，Allen-Cahn 方程式の特異極限と同様の平均曲率流に異なる mobility を考慮したものとなることが知られている．本研究の成果として，古典的な Galerkin 法を用いてスケーリングする前の方程式に対して解の大域的存在を証明した．また現在，この方程式にホワイトノイズの効果を考慮した方程式の研究に着手している．

今後の研究計画

長瀬優子

現在のところ以下の方向性で研究を進める;

[特異摂動問題と Monotonicity formula の構成]
これまでの Modica-Mortola 型のエネルギー汎関数の解析の続きとして，まずこのエネルギーの非等方的効果を考慮したものを考えたい．しかし，非等方的効果を考慮したものでは，その取り扱いのなかで重要である monotonicity formula は一般に成立しないことが知られている．そこで非等方性にどの様な条件を課すと monotonisity formula が成立するかを考える．またその次の問題として，リーマン多様体上での Modica-Mortola 型エネルギー汎関数の構成を行いたい．リーマン多様体上では， F. Pacard and M. Ritoré によりいくつかの解析がなされている．今後の研究で克服しなければならない点は monotonicity formula の構成であり幾何学的な性質を深く理解する必要がある．

[Cahn-Hilliard/Allen-Cahn 方程式]
CH/AC 方程式の時間漸近挙動に関して，Israel 氏によりいくつかの解析がなされている．本研究ではそのより詳細を解析したい．また今後の研究としては， ホワイトノイズの効果を考慮をした確率 CH/AC 方程式に関しても研究を行いたい．方程式の導出を考慮すると，確率項を付けた方程式を考えるのがより自然である．まず特異極限に平均曲率流が表れる Allen-Cahn 方程式と同じスケーリングの特異極限を取り扱いたい． このためには，確率偏微分方程式の扱いを深く知ることが必要である．また将来的には確率 CH/AC 方程式の時間漸近挙動に関しても取り扱いたい．