今後の研究計画

基本的には，野村がこれまで，とくに過去 20 年間程，一貫して推進してきた等質開凸錐や，複素または実等質 Siegel 領域の代数・幾何・解析に関しての多角的な研究を継続して発展させる方針で研究を続ける．これまでの研究は順調に成果を積み上げてきているので，その研究内容や手法に大きな方向転換の必要は無いと考えている．とくに，中島秀斗との共同研究で扱った Euclid 型 Jordan 代数の自己共役表現から得られる領域とその上での解析学の発展に力を注ぐともに，山崎貴史との共同研究で援用した向き付けグラフをより積極的に用いて，等質開凸錐のより詳細な代数的構造にも新たに切り込みたい．以下では，短期的な計画 1)，2) と長期的な計画 3) を述べる．

1) **等質開凸錐の基礎理論の整備**．等質開凸錐の理論の基礎付けは，1963 年の Vinberg の論文によりなされたのであるが，実はその論文には，非結合的代数から得られる等質錐の凸性の証明の部分に大きな飛躍がある．この飛躍は，Koszul による一般的な幾何学的議論を援用して埋められ（志磨裕彦著『ヘッセ幾何学』第 8 章に採録），また Rossi と Vergne による 1973 年の論文で解析的な議論によっても埋められているが，野村は元々の Vinberg の代数的手法をより精密化することによっても飛躍を埋められることに気づき（帰納法自体は双対錐も巻き込む大掛かりなものになるが），2017 年 2 月の田中慧の九州大学修士論文において実際に証明を実行してもらっている．修士論文の幾つかの箇所における強引な議論と計算を洗練することが学術論文とするには必要と考えて今日に至っているが，目先の第一の研究到達目標として，洗練化に決着をつけて学術論文としてまとめあげたい．

2) **等質開凸錐の最小行列実現**．2016 年 2 月に九州大学で開催された研究集会「Geometry, Representation Theory, and Differential Equation」において野村が発表した「Optimal matrix realization of homogeneous cones」の詳細を学術論文としてまとめあげることを，上記項目 1) に続く第 2 の短期目標としたい．この行列実現とは，うまく正整数 N をとって，N 次実対称行列のなすベクトル空間 $\mathrm{Sym}(N,\mathbb{R})$ の中で正定値なものがなす開凸錐 $\mathscr{P}(N,\mathbb{R})$ の，$\mathrm{Sym}(N,\mathbb{R})$ の部分空間 Z によるスライス $Z\cap\mathscr{P}(N,\mathbb{R})$ として，与えられた等質開凸錐 Ω を実現するものである．2014 年の Graczyk–Ishi の論文にあるように，このような実現はいくつもあるが，その中で N が最小となるものを山崎との 2015 年の共同研究の成果を用いて与える．その最小の行列のサイズ N_0 を与える公式は，Ω の代数的構造を用いて描かれる向き付けグラフにおける術語と情報によって明示的に記述される．

3) **良い性質をもつ等質開凸錐上の解析学**．等質開凸錐や等質 Siegel 領域は，階数が 1 である Damek–Ricci 空間の高階数版であるという視点で，野村は研究を続けて来た．この Damek–Ricci 空間は「非対称な非コンパクト調和空間」ということで，幾何学的にも大いに注目を集めた空間である．それはまた，可解リー群の等質空間上の解析学にも新たな展開を示唆するものでもあった．対称領域を扱った研究では，対称領域そのものが十分にセレクトされた対象であるがゆえに，階数が高くなっても確固とした具体例があり，そこでの実証・実験から一般の場合への理論の構築がなされてきた．翻って非対称領域の場合，階数が高くなると，リッチな構造を持つ適切な具体例そのものが従前にはほとんど知られておらず，またそのような具体例の系列を抽出するという研究もこれまで多くはなされてこなかった．しかし，野村によるここ 15 年ほどの研究でそういった間隙が埋められつつあり，その研究成果を踏まえながら，対称とは限らないけれども十分にセレクトされた等質凸領域や実あるいは複素の等質 Siegel 領域上での解析学の研究を推進していく．向き付けグラフを援用する手法も見出しているので，研究を進めるための道具も増えたと考えている．対称領域から出発して定義される非対称領域の研究を含むことになるので，対称領域ですでに確立されている様々な事柄に対する新たな角度からの意義付けも同時にできると考えている．