これまでの研究成果

主として過去 20 年程度から現在に至る研究成果について述べる．

1) **Berezin 変換に関する研究と等質 Siegel 領域の対称性条件の研究**．Berezin 変換は，Berezin の量子化に現れる重要な作用素であるが，実は再生核 Hilbert 空間さえあれば定義できる．とくに，Lie 群の表現が実現されている多項式函数や正則函数のなす再生核 Hilbert 空間から定義されるものを扱ってきた．この Berezin 変換は群作用とは可換な自己共役作用素であり，そのスペクトル分解を具体的に記述することは重要な問題である．藤田悦郎（大学院生：当時）とのケース・スタディをはじめ，一般論，およびいくつかの例について Berezin 変換の明示的スペクトル分解を得ている．その後，等質 Siegel 領域 D 上の Berezin 変換が D 上の Laplace–Beltrami 作用素と可換であることと，D が対称領域であることとは同値であることを証明した．そのために，Penney によって導入された等質 Siegel 領域の Cayley 変換をパラメータ付きのより一般的なものにし，それらがすべて等質有界領域に写す双有理写像であること等，基本的な性質を証明した．さらに，この Cayley 変換のノルム等式を用いた等質 Siegel 領域の対称性条件を確立した．これは Dorfmeister や Satake によって得られていた代数的・構造論的な条件式を，より幾何学的色彩の濃いものにしている．また，Szegö 核を用いた Hua の流儀によって定義された等質 Siegel 領域の Poisson 核が Laplace–Beltrami 作用素で消される（すなわち調和函数である）ための必要十分条件は領域が対称となることを示した（実際は領域のエルミート計量も一般化して，もう少し強いことを証明している）．これらは，領域上の作用素の性質が領域の形状を決めてしまうという大変興味深い結果である．また，等質開凸錐の中での対称領域となるものの特徴付けに関しても，甲斐千舟（大学院生：当時）と共同で研究を行なった．Jordan 代数における逆元を一般化した擬逆元を用いる特徴付けや，上述の Cayley 変換を等質管状領域の場合に用いて，その Cayley 変換像の凸性によって対称管状領域を特徴付けた．

2) **良い性質をもつ等質開凸錐の抽出**．この研究は，一般の等質開凸錐の世界はまさに玉石混淆であり，その領域上でリッチな解析学を展開するためには適切な選別作業が必要であるとの認識によるものである．2008 年，2009 年の伊師英之との共同研究では，対称錐ではないが，双対錐と線型同型でかつ既約である例を与えた．とくに 2009 年の論文では，3 以上の任意階数の例を与えている．

3) **等質開凸錐に付随する基本相対不変式の研究**．等質開凸錐に付随する基本相対不変式とは，行列の首座小行列式系を一般化する既約多項式の系であって，等質開凸錐をそれらの正領域として記述するものである．2008 年の伊師との共同研究では，基本相対不変式の解析接続を用いて，対称管状領域において成立する不等式系を証明している．さらに，この不等式系が成立する非対称等質管状領域の例を挙げ，次元が 10 以下ではこの例がただ一つのものであることにも言及した．次に，Euclid 型 Jordan 代数の自己共役表現から得られる等質開凸錐について中島秀斗と共同研究を行い，付随する基本相対不変式系を明示的に書き上げた．副産物として，上述のテーマ 2) に関連して，良い性質を持つ等質開凸錐の系列を系統的に得ている．より詳しく述べると，研究で扱った等質開凸錐の双対錐では，基本相対不変式の次数が $1, 2, \ldots, r$（r は等質開凸錐の階数）となることがわかった．一方，2016 年の山崎貴史との共同研究では，階数 r の等質開凸錐とその双対錐に付随する基本相対不変式の次数がともに $1, 2, \ldots, r$ であることによって，既約な対称錐を特徴付けている．

4) **等質開凸錐の実現に関する研究**．2015 年の山崎との共同研究において，一般の等質開凸錐を行列を用いて実現した．これは，非対称な等質開凸錐の例を最初に挙げた Vinberg のアイデアを一般化するもので，等質開凸錐の代数的構造から描かれる向き付けグラフ (oriented graph) を援用する．この成果により，難解とされてきた等質開凸錐の一般論をブラック・ボックス化し，その実現が単純な手続きにより得られ，非専門家の等質開凸錐へのアプローチを容易にしている．