これまでの研究成果のまとめ

大森俊明

指数調和写像の調和写像論への応用

本研究では，**指数調和写像による調和写像の統一的な存在理論の構築を行ってきた**．応募者の研究以前では，調和写像の存在理論を展開するにあたって，それぞれの状況に応じた手法（熱流の方法・摂動法など）が用いられており，それらに対して統一的な理解を与えたという点にこの研究の価値がある．

調和写像は，調和函数に対する Dirichlet 積分を多様体に値をとる写像 $u\colon M \to N$ にまで拡張したエネルギー汎函数 $\mathrm{E}(u) = \int_M |\nabla u|^2 \, d\mu_g$ の臨界点として定義され，幾何解析の分野では最も基本的な研究対象の一つである．調和写像の存在は，多様体の次元，幾何（曲率）やトポロジーと深く関わり，これまで多くの研究者により存在に関する様々な障害が調べられている．一方，ε-指数調和写像とは，

$$\mathbb{E}(u) = \int_M e^{\varepsilon |\nabla u|^2} \, d\mu_g$$

（$\varepsilon > 0$）なるエネルギー汎函数の臨界点として定義される写像のことをいい，多様体の幾何に関係なく高い存在・正則性を示すことが知られている．応募者が得た結果を以下に述べる（四角括弧内の番号は論文リストの番号）

- 値域 N が非正曲率を持つ場合に，ε-指数調和写像の列 (u_ε) が $\varepsilon \to 0$ において調和写像に一様収束することを示し，調和写像の存在を主張する Eells-Sampson の定理を再証明した［1］．
- 定義域 M が実 2 次元の場合に，同写像列の収束の障害（バブル）を解析し，特に，$\pi_2(N) = 0$ の場合には調和写像に一様収束することを示した（Sacks-Uhlenbeck の定理の再証明）［2］．
- 定義域 M が非コンパクトの場合に，指数調和写像の存在定理を拡張し，また，非正曲率多様体への指数調和写像のエネルギー Liouville 性を証明した［4］．
- 値域 N が非正曲率を持つ場合に，指数調和写像流の時間大域解の存在を証明した［5］．
- 球面間の同変調和写像の存在の障害としてある減衰条件が知られているが，同変指数調和写像に対してはそのような条件は必要なく，無条件に存在することを証明した（Y.-J. Chiang 氏と浦川肇氏との共同研究）［7］．

グラフに対する離散曲面論

本研究では，**材料科学の分野からの動機により，グラフの空間実現とそれに対する離散曲面論，および，その連続極限**をテーマとしている．

- **連続曲面の離散化でもなく，必ずしも面の存在を仮定しない次数 3 の空間グラフに対して離散曲面論を構築した**．具体的に述べると，離散幾何解析の視点から，法ベクトル，平均曲率とガウス曲率を定義し，その諸性質（面積変分，標準実現（調和実現）曲面の曲率，細分列の収束）を調べた．この研究は，既存の曲面論の枠にはまらない非多面体曲面を対象にするという点で新しい（小谷元子氏と内藤久資氏との共同研究）［3］．
- 次数 3 または 4 の有限グラフに対する重要なグラフ細分列（Goldberg-Coxeter 細分，GC 細分）の固有値の解析を行った．GC 細分とは，パラメータ k を持ち，girth を有界に保ちながら頂点数を $O(k^2)$ のオーダーで増やすグラフ細分で，曲面グラフの場合，双対グラフを考えると曲面の特殊な三角形分割に対応している．GC 細分が普遍的に持つラプラシアン固有値を具体的に求めることに成功し，$o(k^2)$ 個の固有値が自明な下界 0 と上界（6 または 8）に収束することを示した（内藤久資氏と楯辰哉氏との共同研究）［6］．