今後の研究計画

佐野めぐみ（Megumi Sano）

１．論文リスト[2]で未解決として残った箇所を解決する

論文[2]では臨界 Sobolev 空間から Lorentz-Zygmund 空間への埋め込みに関連する最小化問題の最小化関数の存在・非存在に関して、Horiuchi-Kumlin 論文(2012)により指摘された未解決問題について考察し、ある一ヵ所を除いては解答を得た。具体的には、最小化問題にはあるパラメータが入っており、そのパラメータのある閾値を境にして最小化関数の存在・非存在が変わることを示した。しかしながらパラメータが閾値の場合には、最小化問題の最小化関数の存在・非存在は非常に繊細な問題で解析が困難であり、最小化関数が存在するかしないかは未だ判明していない。今後はこの判明していない箇所に関して、ポテンシャル関数の形状と球対称再配列の理論、閾値の評価を上手く組み合わせながら解決していく。

２．論文リスト[2]の結果を重み付き臨界 Sobolev 空間に一般化する

論文[2]で考察した最小化問題は重みがついていない通常の臨界 Sobolev 空間の埋め込みに関連するものであるが、Horiuchi-Kumlin 論文(2012)では、重み付きの場合も未解決問題として指摘されている。重みが付いたことにより、[2]で用いた手法はそのままでは適用できない。今後は[2]で用いた手法を一般化しながら、重み付きの場合も考察していく。その際、球対称関数に帰着させる方法として、重み関数がついた球対称再配列の理論や moving plane 法などを用いる。また重みを付けたことにより、質の違う非コンパクト性が二つ生じ、臨界指数が二つ現れる”二重臨界”という状況が生じる。この場合は解析がより複雑になるため、最小化列が一点に集中する場合、集中する点が複数の場合を分けて考察し、それぞれの可能性を排除し、解決していく。なお本研究は G. Hwang 氏 (Yeungnam Univ.)との共同研究として進めていく。

３．臨界 Hardy 不等式の補外理論的な導出と高階への応用

補外理論とは実解析の分野(作用素の L^p 有界性)で現れるものであり、「劣臨界の形から臨界の形を導出しよう」という考え方に基づく方法論である。古典的な Sobolev 不等式に関しては N. Trudinger により 1967 年に考察され、臨界形(極限形)として Trudinger-Moser 不等式が導出された。本研究では古典的な（劣臨界）Hardy 不等式に対して補外理論的な手法を用いて、ある種の極限を考え、その極限形として臨界 Hardy 不等式が現れることを示す。またその補外理論的な新たな導出を行うことで、「臨界 Hardy 不等式になぜ対数補正項が付加されるのか」という素朴な問いに関して解答を与える。さらに Hardy 不等式の高階版である Rellich 不等式に対しても同様の考察を行い、L^2ベース以外では研究が進んでいない臨界 Rellich 不等式に対しても考察を行う。なお本研究は曽布川氏 (早稲田大学)との共同研究として進めていく。