これまでの研究成果のまとめ

佐野　めぐみ（Megumi Sano）

概略

　関数不等式及び付随する最小化問題における研究は、それ自体の興味もさることながら関数空間同士の埋め込みの関係性を表し、楕円型偏微分方程式の解の存在を議論する際に中心的な道具となることからも大変基本的であり重要である。

　私はこれまで特に Hardy 型不等式及び一般化された種々の関数不等式の「最良定数の値」や「付随する最小化問題の達成可能性（不等式の等号成立条件)」、そして最小化問題からのアプローチでは議論できないような「非線形楕円型偏微分方程式の解の存在」について研究を行ってきた。最近は古典的な Hardy 不等式の臨界の場合として知られている臨界 Hardy 不等式:

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_\Omega \frac{|v(y)|^N}{|y|^N\left(\log\frac{R}{|y|}\right)^N} dy \le \int_\Omega |\nabla v(y)|^N dy \quad \left(\forall v \in W_0^{1,N}(\Omega), R \coloneqq \sup_{y\in\Omega}|y|\right)$$

に関連する臨界型変分問題に興味を持ち、研究を行ってきた。

詳細

　臨界 Hardy 不等式は、不等式の形や最良定数、ポテンシャル関数の特異性の構造までもが劣臨界 Hardy 不等式と異なっているため、通常別物として扱われるが、両者に付随する最小化問題に関する事実は、達成不可能となる理由までもが酷似している。これを受け、私は別物と見なされていた劣臨界 Hardy 不等式と臨界 Hardy 不等式は実は同一のものであるのではないかと予想し、実際にある変換を行うことで最小化問題として同値となることを明示的に証明した（論文[7]）。また私はこの研究を Sobolev 型不等式まで発展させ、2016 年 1 月号の堀内氏の数学の論説でも言及された一般化臨界 Hardy 不等式の最小化問題に関する未解決な問題について最近、解答を得ることに成功した。この研究結果は学術論文としてまとめられ、掲載決定済みである（論文[2]）。そして臨界 Hardy 不等式だけでなく、Rellich 不等式、Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式等の様々な Hardy 型不等式を改良するという手法で、達成不可能となる原因を明示的に表しているような改良型不等式の作成にも成功し（論文[1]，［5]，［6]，［9]）、方程式への応用(論文[3],[8])も行った。

　その他にも埋め込みのコンパクト性の欠如の原因の一つである「消失現象(Vanishing)」に関連した球対称 Sobolev 空間$W^{1,p}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$の埋め込み：$W^{1,p}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$のコンパクト性について解析を行った。具体的には変動指数$q(\cdot)$の挙動によって、埋め込みのコンパクト性が変わるという結果を得た。さらに通常よく仮定される Ambrosetti-Rabinowitz 条件を満たさない困難の伴う楕円型偏微分方程式の解の存在について変分法を用いて示した（論文[4]）。