今後の研究計画

佐藤 敬志

(1) 擬鏡映群

複素ベクトル空間上の自己同型写像で余次元 1 の超平面を固定する非自明なものは擬鏡映と呼ばれる。実ベクトル空間ではそのような自己同型の位数は 2 だが、擬鏡映は位数が 2 とは限らない。擬鏡映で生成される有限群を擬鏡映群という。擬鏡映群は Weyl 群の自然な一般化であり、旗多様体の場合のような幾何と組合せ論の関連があって然るべきと考える。ゆえに一番の目標としてこの関連を明らかにしたい。

擬鏡映群は 60 年以上前に Shephard-Todd により分類されたが、その組合せ論についてはほぼ何も知られていないのが現状である。別紙「これまでの研究概要」にて出て来たキーワードである適切な長さ関数や半順序構造が不明である。また対応する旗多様体の類似物は適当な completion のもとで得られているが、Bruhat 分解のような組合せ論的構造は不明である。これを解決するために、Weyl 群と旗多様体のコホモロジー環およびセル複体の構造との関係性のノウハウを活かせると考えている。具体的には擬鏡映群から得られる “同変コホモロジー環” の GKM 理論的な記述から貼り付け写像を逆算して、擬鏡映群の組合せ論を反映した空間をセル複体のようなものとして作ることができるのではないかと考えている。

乗り越えるべき障害はいくつかあるが、その 1 つは次のものである。擬鏡映群に対応する “同変コホモロジー環” の GKM 理論的記述は既に知られているが、それは全く構成的でない。これをセルの貼り付けに対応した形で構成的に書く必要がある。2 つ目は適切な長さ関数の構成と半順序構造の決定である。これについては、Weyl 群の元の長さや半順序の言い換えをもとに定義する方法を考えていて、実際に位数の小さな擬鏡映群については長さ関数の値と “コホモロジー環” の Betti 数が合致することを確かめている。また、擬鏡映群の一部に Shephard 群と呼ばれる複素ベクトル空間内の図形の対称性とみなせるものがあり、その場合には図形の組合せ論に基づいた直接的な定義が与えられる可能性がある。

(2)Regular semisimple Hessenberg 多様体

Regular semisimple Hessenberg 多様体は対応する Lie 群の極大トーラス T の作用で閉じていて、T-作用での固定点における接空間は lower ideal に入っていないルートに応じて削られているものである。また、regular semisimple Hessenberg 多様体にはセル分割ではなく paving が与えられていて、各セルは必ずしもより低次元のセルに張り付いていなくて良い。これについて、やはり同変コホモロジー環の GKM 理論的記述があるが、あまり明示的なものではない。また、旗多様体の場合のテクニックが使えない事情もあり、paving における各セルに対応するコホモロジー類の記述は知られていない。Regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環の lower ideal の言葉で明示的に記述すること及び paving における各セルに対応するコホモロジー類の記述を与えたい。そのコホモロジー環の記述は、例えば Hessenberg 版の Schubert calculus などへの応用をもつ点で重要であろう。

また、lower ideal を固定することで、G の Lie 環を底空間としてファイバーに Hessenberg 多様体をもつ空間が考えられる。そのような視点からこれまでの研究成果と regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環の記述の統合を目指す。