

これまでの研究概要

佐藤 敬志

(1) 研究の動機

旗多様体など対称性の高い空間は、その幾何的な性質が組合せ論的に記述できることが多い。具体的な例としては、旗多様体の有理数係数コホモロジー環が鏡映群である Weyl 群の余不変式環となること、旗多様体の Bruhat 分解と Weyl 群の半順序構造、さらにはそのセルの次元と Weyl 群の元の長さの対応などである。様々な空間と組合せ論的対象において、そのメカニズムを明らかにしたいというのが私の研究の動機である。

(2) 研究成果

G を連結なコンパクト Lie 群とし、 T をその極大トーラスとする。旗多様体 G/T には左からの積で T が作用する。 G が F_4, E_6 型の時に、この T -作用に関する旗多様体の整係数同変コホモロジー環を、多項式環の商環として、イデアルの生成元を具体的に明示して、決定した。また、 $\frac{1}{2}$ が存在する係数の場合の C 型の同変コホモロジー環の表示は既知だったが、整係数の場合のそれを決定した。これらの決定には、Bruhat 分解に基づいた同変コホモロジーの計算手法として GKM 理論と呼ばれるものを用いた。GKM 理論により、セルの貼り付け写像の情報をルート系の言葉で書くことが可能であった。組合せ構造を活かした計算手法により、環の表示に直観的で幾何学的な意味を与えることにも成功した。

また、旗多様体 G/T の subvariety として Hessenberg 多様体というものがある。 G の正ルートの集合、つまり正ルート系を Φ^+ で表す。Hessenberg 多様体は、 G の Lie 環の元と Φ^+ の“良い”部分集合（これは lower ideal と呼ばれる）という 2 つのデータに対して定まるものである。ちなみに lower ideal が Φ^+ 自身の場合は、Hessenberg 多様体は旗多様体になる。Hessenberg 多様体は Springer 多様体などを含む重要な variety のクラスであることが知られていたが、私は共同研究により Hessenberg 多様体のコホモロジー環の、多項式環の商環としての表示を決定した。より正確には、 G の Lie 環の元が regular nilpotent であるときの Hessenberg 多様体のコホモロジー環を lower ideal の言葉で記述することに成功した。さらに、regular semisimple であるときの Hessenberg 多様体のコホモロジー環には Weyl 群の作用が存在し、この作用による不変式環が regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環に一致することを証明した。これは lower ideal が両者で同じ場合の話である。

また、この研究を通じて以下のことが明らかになった。lower ideal から得られる組合せ論が regular nilpotent Hessenberg 多様体の幾何として現れるのである。Hessenberg 多様体の重要性を強調するためにそれを説明する。旗多様体の Bruhat 分解のセルは Weyl 群の元に対応しており、その次元は Weyl 群の元の長さに対応していた。 T の Lie 環上には Φ^+ による超平面配置があり、その各連結成分つまり Weyl 領域は Weyl 群の元に対応しており、基本 Weyl 領域に着目した組合せ論は Weyl 群の半順序構造や元の長さを記述する。Lower ideal は Φ^+ の部分集合であったので、部分超平面配置を与え、いくつかの Weyl 領域は 1 つの連結成分に合体する。regular nilpotent Hessenberg 多様体にもセル分割が存在することが知られていたが、実はそれは合体した連結成分と対応しており、セルの次元は先程の組合せ論を部分超平面配置に制限した形で記述されることを明らかにした。

このような点で Hessenberg 多様体は旗多様体の正統な後継者とでも言うべき、非常に重要で美しい性質をもつ variety なのである。それゆえ、そのコホモロジー環の決定と、幾何と組み合わせ論のつながりを明らかにした我々の結果は非常に重要なものである。